ملخص درس الدوال الأصلية:

الدوال الأصلية: تعاريف و خاصيات

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
نسمي دالة أصلية للدالة f على I , كل دالة F قابلة للاشتقاق على I ,و مشتقتها f هي ,أي $(\forall x\in I);F'(x)=f(x)$

خاصية 1: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و F دالة أصلية للدالة على I , الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x\mapsto F(x)+k$, حيث k عدد حقيقي.

خاصية 2: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و x_0 عنصرا من I و y_0 عددا حقيقيا معلوما.
إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية على I فانه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على I بحيث: $G(x_0)=y_0$

خاصية 3: كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I .

خاصية 4: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I ,و k عددا حقيقيا.
إذا كانت F و G دالتين أصليتين,على التوالي للدالتين f و g على I , فان:

- الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .
- الدالة kF دالة أصلية للدالة kf على.

أمثلة:

حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

1) $f(x)=5x^4+3x+1$

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x$

4) $f(x)=(2x-1)^3$

5) $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}$

6) $f(x)=2\sqrt{2x+1}$

7) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

8) $I=\mathbb{R};f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$

9) $f(x)=\cos x e^{\sin x}$

أجوبة :

1) $f(x)=5x^4+3x+1$
اذن $F(x)=5\times\frac{1}{5}x^5+3\times\frac{1}{2}x^2+1x+k$ $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$
اذن $F(x)=2\sqrt{x}+\sin x-\cos x-x+k$
$k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x=x'\sin x+x(\sin x)'$
اذن $F(x)=x\times\sin x+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(2x-1)^3=\frac{1}{2}(2x-1)'(2x-1)^3$
اذن $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3+1}(2x-1)^{3+1}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$
ومنه $F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$ يعني $f(x)=-\frac{x}{(x^2-1)^2}$
اذن $F(x)=\frac{1}{x^2-1}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=2\sqrt{2x+1}=(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}$
اذن $F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$
ومنه $F(x)=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$
ومنه $F(x)=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+k$
$k\in\mathbb{R}$

7) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$
اذن $F(x)=\sqrt{x^2+1}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

8) لدينا $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}=\frac{1}{4}\frac{(x^4+2)'}{x^4+2}$
اذن : $F(x)=\frac{1}{4}\ln|x^4+2|+k$ حيث: $k\in\mathbb{R}$
يعني : $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+2)+k$ لأن :
$x^4+2>0$

9) $f(x)=\cos x e^{\sin x}=(\sin x)'e^{\sin x}$
ومنه $F(x)=e^{\sin x}+k$ مجموعة الدوال الألية على $\mathbb{R}$

جدول دوال أصلية لدوال اعتيادية:

الدالة f	الدوال الأصلية F	الدالة f	الدوال الأصلية F	الدالة f	الدوال الأصلية F
$a;(a\in\mathbb{R})$	$ax+k;k\in\mathbb{R}$	e^x	e^x+k	$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
x	$\frac{x^2}{2}+k$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+k$	$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$x^n;n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$ln\lvert u(x)\rvert+k$	$u'+v'$	$u+v+k$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}+k$	$x^r;r\in(\mathbb{Q}^*-\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+k$	$u'\times v+u\times v'$	$u\times v+k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$	$u'e^u$	e^u+k	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+k$
$\cos x$	$\sin x+k$	$\sin x$	$-\cos x+k$	$\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$\frac{u}{v}+k$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+k$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$	$u^n\times u'$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+k$