تمارين وحلول

تمرين 1 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $e^{x-2} = e$ 2) $e^{x^2+x} = 1$ 3) $8e^{3x} - 1 = 0$

4) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$ 5) $e^{x} - 2e^{-x} - 1 = 0$ 6) $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0$

الحل

1) حل المعادلة : $e^{x-2} = e$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المعادلة تكافئ $e^{x-2} = e^{1}$

أي : $x - 2 = 1$ أي : $x = 3$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $S = \{3\}$

2) حل المعادلة : $e^{x^2+x} = 1$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المعادلة تكافئ $e^{x^2+x} = e^{0}$

أي : $x^2 + x = 0$ أي : $x(x+1) = 0$

أي : $x = 0$ أو $x = -1$

إذن : $S = \{-1, 0\}$

3) حل المعادلة : $8e^{3x} - 1 = 0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المعادلة تكافئ $e^{3x} = \frac{1}{8}$

أي : $3x = \ln\frac{1}{8}$ أي : $x = \frac{-\ln 8}{3}$

أي : $x = \frac{-3\ln 2}{3}$ أي : $x = -\ln 2$

إذن : $S = \{-\ln 2\}$

4) حل المعادلة : $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

حلا المعادلة $t^2 - 3t + 2 = 0$ هما 1 و 2

إذن المعادلة $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

تكافئ $e^{x} = 1$ أو $e^{x} = 2$

أي : $x = \ln 1$ أو $x = \ln 2$

أي : $x = 0$ أو $x = \ln 2$

ومنه : $S = \{0, \ln 2\}$

5) حل المعادلة : $e^{x} - 2e^{-x} - 1 = 0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المعادلة تكافئ $e^{x} - \frac{2}{e^{x}} - 1 = 0$

أي : $(e^{x})^2 - e^{x} - 2 = 0$

أي : $e^{x} = -1$ أو $e^{x} = 2$

(لأن حلي المعادلة $t^2 - t - 2 = 0$ هما -1 و 2)

أي : $e^{x} = 2$ (لأن $e^{x} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $x = \ln 2$ إذن : $S = \{\ln 2\}$

6) حل المعادلة : $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المعادلة تكافئ

$$6e^{5x+2} - 7\sqrt{(e^{4x+2})^2} + e^{3x+2} = 0$$

أي : $6e^{5x+2} - 7e^{4x+2} + e^{3x+2} = 0$

أي : $e^{3x+2}(6e^{2x} - 7e^{x} + 1) = 0$

أي : $6e^{2x} - 7e^{x} + 1 = 0$ (لأن $e^{3x+2} \neq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $e^{x} = \frac{1}{6}$ أو $e^{x} = 1$

(لأن حلي المعادلة $6t^2 - 7t + 1 = 0$ هما $\frac{1}{6}$ و 1)

أي : $x = -\ln 6$ أو $x = 0$

إذن : $S = \{-\ln 6, 0\}$

تمرين 2 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $e^{x-1} < 1$ 2) $\frac{e^{x} - 2}{e^{x} + 1} > 0$ 3) $e^{2x} - 3e^{x} < 0$

4) $e^{2x} + e^{x} - 6 \geq 0$ 5) $e^{x} - 2e^{-x} + 1 < 0$ 6) $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^{x} > 0$

الحل

1 حل المتراجحة : $e^{x-1} < 1$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المتراجحة تكافئ $e^{x-1} < e^0$

أي : $x - 1 < 0$ أي : $x < 1$

إذن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي : $S =]-\infty, 1[$

2 حل المتراجحة $\dfrac{e^x - 2}{e^x + 1} > 0$

بما أن $e^x + 1 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

فإن المتراجحة تكافئ $e^x - 2 > 0$

أي : $e^x > 2$ أي : $x > \ln 2$

وبالتالي فإن : $S =]\ln 2; +\infty[$

3 حل المتراجحة $e^{2x} - 3e^x < 0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المتراجحة تكافئ $e^x(e^x - 3) < 0$

أي : $e^x - 3 < 0$ (لأن $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $e^x < 3$ أي : $x < \ln 3$

إذن : $S =]-\infty; \ln 3[$

4 حل المتراجحة : $e^{2x} + e^x - 6 \geq 0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المتراجحة تكافئ $(e^x - 2)(e^x + 3) \geq 0$

أي : $e^x - 2 \geq 0$ (لأن $e^x + 3 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $e^x \geq 2$ أي : $x \geq \ln 2$

إذن : $S = [\ln 2, +\infty[$

5 حل المتراجحة : $e^x - 2e^{-x} + 1 < 0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المتراجحة تكافئ $e^x - \dfrac{2}{e^x} + 1 < 0$

أي : $\dfrac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x} < 0$ أي : $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

(لأن $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $(e^x - 1)(e^x + 2) < 0$

أي : $e^x - 1 < 0$ (لأن $e^x + 2 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $e^x < 1$ أي : $x < 0$

إذن : $S =]-\infty, 0[$

6 حل المتراجحة : $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المتراجحة تكافئ

$e^x(e^{2x} - 6e^x + 8) > 0$

أي : $e^{2x} - 6e^x + 8 > 0$ (لأن $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $(e^x - 2)(e^x - 4) > 0$

الجدول التالي يعطي إشارة $(e^x - 2)(e^x - 4)$:

x	$-\infty$		$\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
$e^x - 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x - 2)(e^x - 4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $S =]-\infty, \ln 2[\cup]2\ln 2, +\infty[$

تمرين 3 :

حل في $\mathbb{R}^2$ كلا من النظمتين التاليتين :

1 $\begin{cases} e^x + e^y = \dfrac{8}{7} \\ x + y = -\ln 7 \end{cases}$ **2** $\begin{cases} 5e^{-x} + 3e^{-y} = 11 \\ 7e^{-x} - 4e^{-y} = -1 \end{cases}$

الحل

1 حل النظمة : $\begin{cases} e^x + e^y = \dfrac{8}{7} \\ x + y = -\ln 7 \end{cases}$

لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$، هذه النظمة تكافئ : $\begin{cases} e^x + e^y = \dfrac{8}{7} \\ e^{x+y} = e^{\ln\frac{1}{7}} \end{cases}$

أي : $\begin{cases} e^x + e^y = \dfrac{8}{7} \\ e^x . e^y = \dfrac{1}{7} \end{cases}$

وإذا وضعنا : $e^x = a$ و $e^y = b$

فإن النظمة تُصبح : $\begin{cases} a+b=\dfrac{8}{7} \\ ab=\dfrac{1}{7} \end{cases}$

وبحل هذه النظمة نجد أن :

$(b=1$ و $a=\frac{1}{7})$ أو $(b=\frac{1}{7}$ و $a=1)$

أي : $(e^{y}=1$ و $e^{x}=\frac{1}{7})$ أو $(e^{y}=\frac{1}{7}$ و $e^{x}=1)$

أي : $(y=0$ و $x=-\ell n7)$ أو $(y=-\ell n7$ و $x=0)$

وبالتالي فإن : $S=\{(0,-\ell n7);(-\ell n7,0)\}$

2 حل النظمة $\begin{cases} 5e^{-x}+3e^{-y}=11 \\ 7e^{-x}-4e^{-y}=-1 \end{cases}$

• مجموعة تعريف هذه النظمة هي $\mathbb{R}^2$

• إذا وضعنا $e^{-x}=a$ و $e^{-y}=b$

فإن النظمة تُصبح $\begin{cases} 5a+3b=11 \\ 7a-4b=-1 \end{cases}$

وبحل هذه النظمة نجد أن : $a=1$ و $b=2$

أي : $e^{-x}=1$ و $e^{-y}=2$

أي : $x=0$ و $-y=\ell n2$

أي : $x=0$ و $y=-\ell n2$

وبالتالي فإن مجموعة حلول هذه النظمة هي :

$S=\{(0,-\ell n2)\}$

تمرين 4 :

1 نعتبر النظمة $\begin{cases} xy+2=2x \\ 2x-y=m \end{cases}, (x,y)\in\mathbb{R}^2$ حيث m بارامتر حقيقي.

أ • ناقش حسب قيم m عدد حلول هذه النظمة.

ب • حل النظمة من أجل $m=3$

2 اِستنتج مما سبق حَل كل من النظمتين التاليتين :

أ • $\begin{cases} e^{x+y}+2=2e^{x} \\ 2-e^{y-x}=3e^{-x} \end{cases}, (x,y)\in\mathbb{R}^2$

ب • $\begin{cases} \ell nx\ell ny+2=\ell nx^2 \\ \ell n\left(\dfrac{x^2}{y}\right)=3 \end{cases}, (x,y)\in\mathbb{R}^2$

الحل

1 أ • **عدد حلول النظمة** $\begin{cases} xy+2=2x \\ 2x-y=m \end{cases}, (x,y)\in\mathbb{R}^2$

لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، هذه النظمة تكافئ

$\begin{cases} y=2x-m \\ x(2x-m)+2=2x \end{cases}$ أي : $\begin{cases} y=2x-m \\ 2x^2-(m+2)x+2=0 \end{cases}$

إذن عدد حلول النظمة هو عدد حلول المعادلة :

$$2x^2-(m+2)x+2=0$$

مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=(m+2)^2-16$

$=(m+2-4)(m+2+4)=(m-2)(m+6)$

ومنه :

• إذا كان $m\in]-\infty,-6[\cup]2,+\infty[$ فإن : $\Delta>0$

وبالتالي فإن النظمة تقبل حلين مختلفين.

• إذا كان $m=-6$ أو $m=2$ فإن : $\Delta=0$

وبالتالي فإن النظمة تقبل حلا وحيدا.

• إذا كان $m\in]-6,2[$ فإن $\Delta<0$:

وبالتالي فإن النظمة لا تقبل أي حل.

ب • **حَل النظمة من أجل $m=3$**

النظمة في هذه الحالة تقبل حلين مختلفين.

النظمة تكافئ $\begin{cases} xy+2=2x \\ 2x-y=3 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} y=2x-3 \\ 2x^2-5x+2=0 \end{cases}$

أي :
$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 2 \text{ أو } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول هذه النظمة هي :
$$S = \left\{(2,1); \left(\frac{1}{2}, -2\right)\right\}$$

2 أ • حَل النظمة
$$\begin{cases} e^{x+y} + 2 = 2e^x \\ 2 - e^{y-x} = 3e^{-x} \end{cases}$$

لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$، هذه النظمة تكافئ :
$$\begin{cases} e^x.e^y + 2 = 2e^x \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}$$

(ضربنا طرفي المعادلة في e^x)

وحسب نتيجة السؤال السابق فإن النظمة تكافئ :
$$\begin{cases} e^x = 2 \\ e^y = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} e^x = \frac{1}{2} \\ e^y = -2 \end{cases}$$

أي
$$\begin{cases} x = \ell n2 \\ y = 0 \end{cases}$$
(النظمة $\begin{cases} e^x = \frac{1}{2} \\ e^y = -2 \end{cases}$ لا حل لها)

إذن : $S = \{(\ell n2, 0)\}$

ب • حَل النظمة
$$\begin{cases} \ell nx\ell ny + 2 = \ell nx^2 \\ \ell n\left(\frac{x^2}{y}\right) = 3 \end{cases}$$

مجموعة تعريف هذه النظمة هي $(\mathbb{R}^{+*})^2$

ولدينا لكل (x,y) من $(\mathbb{R}^{+*})^2$، هذه النظمة تكافئ :
$$\begin{cases} \ell nx\ell ny + 2 = 2\ell n|x| \\ \ell nx^2 - \ell ny = 3 \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} \ell nx\ell ny + 2 = 2\ell nx \\ 2\ell nx - \ell ny = 3 \end{cases}$$

وحسب نتيجة السؤال 1 ب • فإن هذه النظمة تكافئ :
$$\begin{cases} \ell nx = 2 \\ \ell ny = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} \ell nx = \frac{1}{2} \\ \ell ny = -2 \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} x = e^2 \\ y = e \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}} \\ y = e^{-2} \end{cases}$$

وبالتالي فإن : $S = \left\{(e^2, e); \left(\sqrt{e}, \frac{1}{e^2}\right)\right\}$

تمرين 5 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب مشتقتها في كل من الحالات التالية :

1) $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$ 2) $f : x \mapsto x^3 e^{\frac{1}{x}}$ 3) $f : x \mapsto (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$

4) $f : x \mapsto e^{\sin x}$ 5) $f : x \mapsto \ell n\left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right)$

الحل

1) $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^*$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$:
$$f'(x) = \frac{e^x.x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

2) $f : x \mapsto x^3 e^{\frac{1}{x}}$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^*$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$:
$$f'(x) = 3x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^3.\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$$
$$= x(3x - 1)e^{\frac{1}{x}}$$

3) $f : x \mapsto (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}-\{1\}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}-\{1\}$:
$$f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}} + (x-1).\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}}$$
$$= e^{\frac{x}{x-1}} - \frac{1}{x-1}e^{\frac{x}{x-1}} = \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)e^{\frac{x}{x-1}}$$
$$= \left(\frac{x-1-1}{x-1}\right)e^{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-2}{x-1}e^{\frac{x}{x-1}}$$

4) $f : x \mapsto e^{\sin x}$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:
$$f'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$$

5 $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x - 2}{e^x + 2}\right)$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي :

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \frac{e^x - 2}{e^x + 2} > 0 \quad و \quad e^x + 2 \neq 0\right\}$$

وبما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x + 2 > 0$

فإن : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 2 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \;/\; e^x > 2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > \ln 2\}$

إذن : $D_f =]\ln 2, +\infty[$

وبما أن $e^x - 2 > 0$ و $e^x + 2 > 0$ لكل x من D_f

فإن : $f(x) = \ln(e^x - 2) - \ln(e^x + 2)$

وبالتالي فإن : $f'(x) = \dfrac{(e^x - 2)'}{e^x - 2} - \dfrac{(e^x + 2)'}{e^x + 2}$

$= \dfrac{e^x}{e^x - 2} - \dfrac{e^x}{e^x + 2} = \dfrac{e^{2x} + 2e^x - e^{2x} + 2e^x}{(e^x)^2 - 4}$

$= \dfrac{4e^x}{e^{2x} - 4}$

تمرين 6 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب مشتقتها في كل من الحالات التالية

1 $f : x \mapsto 2^x$ **2** $f : x \mapsto x^x$ **3** $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ **4** $f : x \mapsto x^{\ln x}$

الحل

1 $f : x \mapsto 2^x$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$: $f(x) = e^{x\ln 2}$

وبالتالي فإن : $f'(x) = (x\ln 2)' e^{x\ln 2}$

$= (\ln 2) e^{x\ln 2} = (\ln 2).2^x$

2 $f : x \mapsto x^x$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^{+*}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$:

$f(x) = e^{x\ln x}$

وبالتالي فإن : $f'(x) = (x\ln x)' e^{x\ln x}$

$= \left(\ln x + x.\dfrac{1}{x}\right)e^{x\ln x} = (1 + \ln x)x^x$

3 $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$: $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$

وبالتالي فإن : $f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' e^{\frac{\ln x}{x}}$

$= \dfrac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}.e^{\frac{\ln x}{x}}$

4 $f : x \mapsto x^{\ln x}$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي : $\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$: $f(x) = e^{\ln x \ln x} = e^{(\ln x)^2}$

وبالتالي فإن : $f'(x) = [(\ln x)^2]' e^{(\ln x)^2}$

$= 2.\ln x.\dfrac{1}{x}.e^{(\ln x)^2} = \dfrac{2\ln x}{x} e^{(\ln x)^2}$

تمرين 7 :

في كل من الحالات التالية، أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال I :

1 $\begin{cases} f : x \mapsto xe^{x^2} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$ **2** $\begin{cases} f : x \mapsto xe^{-x^2} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$ **3** $\begin{cases} f : x \mapsto (x^3 + x)e^{x^4 + 2x^2 - 1} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$

4 $\begin{cases} f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} \\ I =]-\infty, 1[\end{cases}$ **5** $\begin{cases} f : x \mapsto \sin 2x.e^{\cos 2x} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$ **6** $\begin{cases} f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} e^{\tan x} \\ I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

الحل

1) $f : x \mapsto xe^{x^2}$

لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2}(x^2)'e^{x^2}$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$

2) $f : x \mapsto xe^{-x^2}$

لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = -\frac{1}{2}(-x^2)'e^{-x^2}$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة : $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

3) $f : x \mapsto (x^3+x)e^{x^4+2x^2-1}$

لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{4}(x^4+2x^2-1)'e^{x^4+2x^2-1}$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{4}e^{x^4+2x^2-1}$

4) $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

لكل x من $]-\infty, 1[$: $f(x) = -\left(\frac{1}{x-1}\right)'e^{\frac{1}{x-1}}$

إذن دالة أصلية للدالة f على $]-\infty, 1[$ هي الدالة $x \mapsto -e^{\frac{1}{x-1}}$

5) $f : x \mapsto \sin 2x . e^{\cos 2x}$

لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = -\frac{1}{2}(\cos 2x)'e^{\cos 2x}$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{\cos 2x}$

6) $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}e^{\tan x}$

لكل x من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $f(x) = (\tan x)'e^{\tan x}$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ هي الدالة : $x \mapsto e^{\tan x}$

تمرين 8 :

أُحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x}$ 2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^x}$ 3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+4}}{x}$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{x}$ 5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-2}{e^x+1}$ 6) $\lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

الحل

1) حساب $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x}$

نعلم أن : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

وبما أن : $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

فإن : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

2) حساب $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^x}$

نعلم أن : $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

وبما أن : $xe^x < 0$ لكل x من $\mathbb{R}^{-*}$

فإن : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty$

3) حساب $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+4}}{x}$

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+4}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}.e^4$

وبما أن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $e^4 > 0$

فإن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+4}}{x} = +\infty$

4) حساب $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{x}$

لدينا :
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} 4.\frac{e^{4x}-1}{4x}$$
$$= \lim_{t \to 0} 4.\frac{e^t-1}{t}$$ (وضعنا $t = 4x$)

وبما أن : $\lim_{t \to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$

فإن : $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{x} = 4$

5) حساب $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-2}{e^x+1}$

لدينا :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-2}{e^x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-2}{e^x+1}=1$

6 حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{t}=1$ (وضعنا $t=\frac{1}{x}$)

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=1$

تمرين 9 :

أُحسب النهايات التالية :

1 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$ 2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x$ 3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}}$ 4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}$ 6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$ 7 $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

الحل

1 حساب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}\cdot\sqrt{x}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$

فإن : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}=0$

2 حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x+\frac{1}{x}e^x$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}.e^x=0$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x=0$

3 حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\cdot\sqrt{x}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}}=+\infty$

4 حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=+\infty$

5 حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\,e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{x}{e^x}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$)

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}=0$

6 حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}-\frac{1}{x}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{t^{2}}$ (وضعنا $t=\sqrt{x}$)

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\frac{t}{2}}\right]^{2}=+\infty$$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}=+\infty$

7) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}e^{\frac{1}{x}}\left(1-e^{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{2}e^{\frac{1}{x}}\left(1-e^{\frac{-1}{x^{2}+x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{x^{2}+x}e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{e^{\left(-\frac{1}{x^{2}+x}\right)}-1}{\frac{-1}{x^{2}+x}}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{x^{2}+x}=1$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\left(-\frac{1}{x^{2}+x}\right)}-1}{\frac{-1}{x^{2}+x}}=\lim\limits_{t\to0^{-}}\frac{e^{t}-1}{t}=1$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=1$

تمرين 10 :

حُل في $I\!R$ المعادلات التالية :

1) $5^{x}=3$

2) $3^{2x}=7^{x}$

3) $3^{x}=-e+\ln 2$

الحل

1) حل المعادلة $5^{x}=3$

لكل x من $I\!R$ ، هذه المعادلة تكافئ : $x\ln 5=\ln 3$

أي : $x=\frac{\ln 3}{\ln 5}$ إذن : $S=\left\{\log_{5}3\right\}$

2) حل المعادلة $3^{2x}=7^{x}$

لكل x من $I\!R$ ، هذه المعادلة تكافئ : $2x\ln 3=x\ln 7$

أي : $x(2\ln 3-\ln 7)=0$ أي : $x=0$

إذن : $S=\left\{0\right\}$

3) حل المعادلة $3^{x}=-e+\ln 2$

مجموعة حلول هذه المعادلة هي المجموعة الفارغة

لأن $(-e+\ln 2)<0$ و $3^{x}>0$ لكل x من $I\!R$

تمرين 11 :

حُل في $I\!R$ المعادلات التالية :

1) $10^{6x}-10^{3x}-2=0$

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-4=0$

3) $2^{x+1}+4^{x}-15=0$

4) $9^{x}-3^{x+1}-10=0$

5) $3^{x}-11.9^{\frac{x}{4}}+18=0$

6) $7^{x+\frac{4}{3}}-5^{3x}=2\left(7^{x+\frac{1}{3}}+5^{3x-1}\right)$

الحل

1) حل المعادلة : $10^{6x}-10^{3x}-2=0$

لكل x من $I\!R$ ، هذه المعادلة تكافئ : $(10^{3x})^{2}-10^{3x}-2=0$

وبما أن حلي المعادلة $t^{2}-t-2=0$ هما -1 و 2

فإن المعادلة تكافئ : $10^{3x}=2$ أو $10^{3x}=-1$

أي : $10^{3x}=2$ (لأن المعادلة $10^{3x}=-1$ لا حل لها)

أي : $3x=\log 2$

أي : $x=\frac{\log 2}{3}$

وبالتالي فإن مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $S=\left\{\frac{\log 2}{3}\right\}$

2) حل المعادلة $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3.\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-4=0$

لكل x من $I\!R$ ، هذه المعادلة تكافئ :

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{x}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-4=0$$

أي : $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\right]^{2}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-4=0$

وبما أن حلي المعادلة $t^{2}-3t-4=0$ هما -1 و 4

فإن المعادلة تكافئ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=4$ ، لأن المعادلة :

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=-1$ لا حل لها.

أي : $x\ln\frac{1}{2}=\ln4$ أي : $-x\ln2=2\ln2$

أي : $x=-2$ إذن : $S=\{-2\}$

3 حل المعادلة : $2^{x+1}+4^x-15=0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المعادلة تكافئ : $2.2^x+(2^2)^x-15=0$

أي : $(2^x)^2+2.2^x-15=0$

وبما أن : $t^2+2t-15=0 \Longleftrightarrow t=3$ أو $t=-5$

فإن المعادلة تكافئ : $2^x=3$ أو $2^x=-5$

أي : $2^x=3$

أي : $x\ln2=\ln3$

وبالتالي فإن : $S=\left\{\frac{\ln3}{\ln2}\right\}$

4 حل المعادلة : $9^x-3^{x+1}-10=0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المعادلة تكافئ : $(3^2)^x-3.3^x-10=0$

أي : $(3^x)^2-3.3^x-10=0$

وبما أن : $t^2-3t-10=(t+2)(t-5)$

فإن المعادلة تكافئ : $3^x=5$ أو $3^x=-2$

أي : $3^x=5$

أي : $x\ln3=\ln5$ أي : $x=\frac{\ln5}{\ln5}$

وبالتالي فإن : $S=\left\{\frac{\ln5}{\ln3}\right\}$

5 حل المعادلة : $3^x-11.9^{\frac{x}{4}}+18=0$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المعادلة تكافئ : $3^x-11.(3^2)^{\frac{x}{4}}+18=0$

أي : $(3^{\frac{x}{2}})^2-11.3^{\frac{x}{2}}+18=0$

وبما أن : $t=9$ أو $t^2-11t+18=0 \Longleftrightarrow t=2$

فإن المعادلة تكافئ : $3^{\frac{x}{2}}=9$ أو $3^{\frac{x}{2}}=2$

أي : $3^{\frac{x}{2}}=3^2$ أو $3^{\frac{x}{2}}=2$

أي : $\frac{x}{2}=2$ أو $\frac{x}{2}=\log_3 2$

أي : $x=4$ أو $x=2\log_3 2$

وبالتالي فإن : $S=\{2\log_3 2,4\}$

6 حل المعادلة : $7^{x+\frac{4}{3}}-5^{3x}=2\left(7^{x+\frac{1}{3}}+5^{3x-1}\right)$

لكل x من $\mathbb{R}$، هذه المعادلة تكافئ :

$$7^{x+\frac{4}{3}}-5^{3x}=2\left(7^{x+\frac{1}{3}}+5^{3x-1}\right)$$

أي : $7^{x+\frac{1}{3}}(7-2)=5^{3x-1}(2+5)$

أي : $5.7^{x+\frac{1}{3}}=7.5^{3x-1}$

أي : $\frac{7^{x+\frac{1}{3}}}{7}=\frac{5^{3x-1}}{5}$

أي : $7^{x-\frac{2}{3}}=5^{3x-2}$

أي : $\left(x-\frac{2}{3}\right)\ln7=(3x-2)\ln5$

أي : $x(\ln7-3\ln5)=\frac{2}{3}\ln7-2\ln5$

أي : $x=\frac{\frac{2}{3}\ln7-2\ln5}{\ln7-3\ln5}$ أي : $x=\frac{\frac{2}{3}(\ln7-3\ln5)}{\ln7-3\ln5}$

أي : $x=\frac{2}{3}$ إذن : $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

تمرين 12 :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $f(x)=(x-1)e^x$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
2. أُدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)
3. اعط جدول تغيرات الدالة f
4. أُدرس تقعر المنحنى (C_f)
5. حدد E نقطة تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل.
6. أُرسم (C_f) (خذ : $\frac{2}{e}\simeq0,7$)

الحل

1 حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x - e^x = 0$

لأن : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

2 دراسة الفرعين اللانهائيين

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

إذن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $-\infty$ مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$ أي محور الأفاصيل.

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x}.e^x = +\infty$

لأن : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

إذن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.

3 جدول تغيرات f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = (1+x-1)e^x = xe^x$

وبما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة x

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4 دراسة تقعر (C_f)

لكل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

إشارة $f''(x)$ هي إشارة : $(x+1)$

ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f''(x)$ وتقعر (C_f):

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
تقعر (C_f)		$\frown$		$\smile$	

الدالة f'' تنعدم مع تغيير الإشارة في العدد -1

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها -1

وأرتوبها $f(-1)$ أي : $-\frac{2}{e}$

5 تحديد E

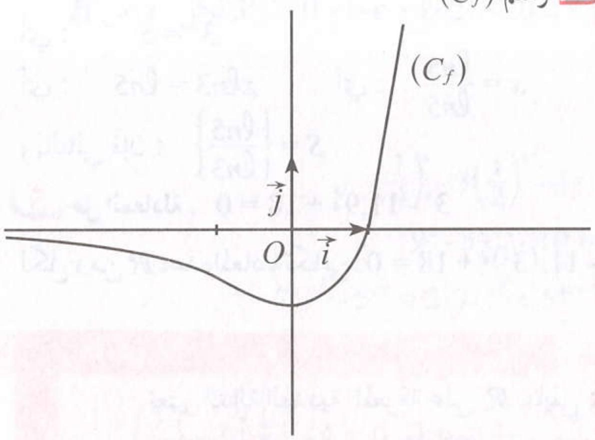
لذلك نحل في D_f المعادلة : $f(x) = 0$

هذه المعادلة تكافئ $(x-1)e^x = 0$

أي : $x - 1 = 0$ (لأن $e^x \neq 0$) أي : $x = 1$

إذن محور الأفاصيل يقطع (C_f) في النقطة $E(1;0)$

6 رسم (C_f)



تمرين 13 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - 1$ وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 أ • أحسب النهايتين : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب • أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

2 بين أن : $f'(x) = -xe^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$، ثم اعط جدول تغيرات الدالة f

3 أ • حدد نقطة انعطاف المنحنى (C) ب • أرسم المنحنى (C)

الحل

1 أ • حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}-1$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}+e^{-x}-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}+e^{-x}-1$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$

(لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$) فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

ب • دراسة الفرعين اللانهائيين

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ ، إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا أفقيا معادلته $y=-1$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}e^{-x}-\frac{1}{x}=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}=1$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.

2 • حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}=-xe^{-x}$$

• جدول تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(-x)$، ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1

3 أ • تحديد نقطة الانعطاف

لكل x من $\mathbb{R}$: $f''(x)=-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)e^{-x}$

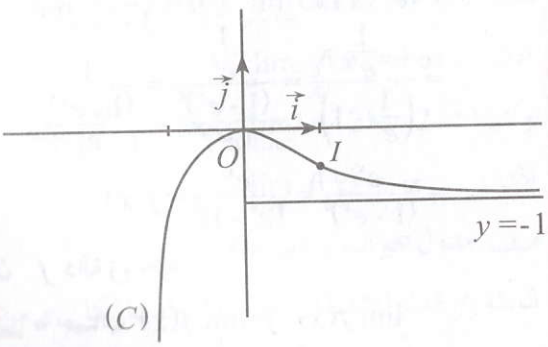
إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x-1$، ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f''(x)$ وتقعر المنحنى (C) :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
تقعر (C_f)		$\cap$		$\cup$	

الدالة f'' تنعدم مع تغيير الإشارة في 1

إذن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها 1 وأرتوبها $f(1)$ أي : $\frac{2}{e}-1$

ب • رسم (C)



تمرين 14 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

1 حدد D_f ثم احسب $f(\ln 2)$ و $f(2\ln 2)$

2 بين أن f دالة زوجية

3 أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

4 أحسب $f'(x)$ لكل x من D_f ثم تحقق من أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-e^x$

5 إعط جدول تغيرات f على D_f

6 أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

7 أرسم (C_f)