الجذع مشترك علمي

الحساب المثلثي

ملخص الدرس

وحدات قياس الزوايا

الراديان	(C) دائرة مركزها O و شعاعها 1. I و M نقطتان منها. قياس الزاوية $I\hat{O}M$ **بالراديان** هو طول القوس IM
الغراد	قياس زاوية مستقيمة **بالغراد** هو 200 غراد

إذا كان : x قياس زاوية هندسية $I\hat{O}M$ بالدرجة
و y قياسها بالراديان
و z قياسها بالغراد

فإن : $\dfrac{x}{180}=\dfrac{y}{\pi}=\dfrac{z}{200}$

الدائرة المثلثية

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الدائرة المثلثية هي دائرة : - مركزها O أصل المعلم
- شعاعها 1
- مزودة بنقطة أصل I
- موجهة توجيها موجبا

الأفاصيل المنحنية لنقطة من دائرة مثلثية

(C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I. و ليكن x عددا حقيقيا

- إذا كان $x \geq 0$: نعتبر نقطة M من (C) بحيث يكون x هو قياس $I\hat{O}M$ بالراديان (أي طول القوس IM) عند التنقل في المنحى الموجب على (C)
- إذا كان $x<0$: نعتبر نقطة M من (C) بحيث يكون $-x$ هو قياس $I\hat{O}M$ بالراديان (أي طول القوس IM) عند التنقل في المنحى السالب على (C)

- العدد x يسمى في الحالتين **أفصولا منحنيا** للنقطة M على (C) و مكتب $M(x)$

- إذا كان $x\in\left]-\pi,\pi\right]$ نقول إن x هو **الأفصول المنحنى الرئيسي** للنقطة M و هو وحيد.

- الأعداد $x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ هي أفاصيل منحنية للنقطة M على (C) , أي أن $M(x)$ و $M(x+2k\pi)$ منطبقان

الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين - الزاوية الموجهة لمتجهتين

- ليكن $[Ox)$ و $[Oy)$ نصفي مستقيمين.

الزوج $([Ox),[Oy))$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و نرمز لها بالرمز (Ox,Oy)

الزوج $([Oy),[Ox))$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و نرمز لها بالرمز (Oy,Ox)

- (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I حيث $I \in [Ox)$ و M نقطة تقاطع (C) و $[Oy)$

و ليكن x أفصولا منحنيا للنقطة M .

العدد الحقيقي x يسمى قياسا للزاوية الموجهة (Ox,Oy) نرمز له بالرمز $(\overline{Ox,Oy})$

و نكتب : $x = (\overline{Ox,Oy})$. لدينا كذلك $(\overline{Ox,Oy}) = x + 2k\pi$ (لأن $x + 2k\pi$ أيضا أفصول منحني للنقطة M)

- $\vec{u}$ متجهة موجهة لـ $[Ox)$ و $\vec{v}$ متجهة موجهة لـ $[Oy)$

الزاوية الموجهة للمتجهتين المحددة بالزوج $(\vec{u},\vec{v})$ هي الزاوية الموجهة (Ox,Oy) و نرمز لها بالرمز $(\vec{u},\vec{v})$

و لدينا : $(\overline{Ox,Oy}) = (\overline{\vec{u},\vec{v}})$

لدينا : $(\overline{\vec{u},\vec{u}}) = 2k\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$

$(\overline{\vec{u},\vec{v}}) = -(\overline{\vec{v},\vec{u}}) + 2k\pi$

$(\overline{\vec{u},\vec{v}}) + (\overline{\vec{v},\vec{w}}) = (\overline{\vec{u},\vec{w}}) + 2k\pi$ (علاقة شال)

النسب المثلثية لعدد حقيقي

$(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ معلم متعامد ممنظم و (C) دائرة مثلثية مركزها O و إصلها I حيث $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ؛ $(k\in\mathbb{Z})$

ليكن x عددا حقيقيا و M نقطة من الدائرة التي أحد أفاصيلها المنحنية هو x

- أفصول النقطة M يسمى **جيب تمام** x و نرمز لم بـ : $\cos x$
- أرتوب النقطة M يسمى **جيب** x و نرمز لم بـ : $\sin x$

$M(\cos x;\sin x)$

ليكن x عددا حقيقيا يخالف $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $(k\in\mathbb{Z})$ و M نقطة من الدائرة التي أحد أفاصيلها المنحنية هو x

ليكن (Δ) المماس للدائرة (C) عند النقطة I و T تقاطع (OM) و (Δ)

- أفصول النقطة T على (Δ) يسمى **ظل** x و نرمز له بـ : $\tan x$
- $|\tan x|=IT$
- نعرف كذلك ظل عدد حقيقي x بـ : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

جدول القيم الإعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

خاصيات

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$-1\le\cos x\le 1$

$-1\le\sin x\le 1$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

لكل x من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ لدينا :

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ؛ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

لكل x من $\mathbb{R}$ و k من $\mathbb{Z}$ لدينا :

$\cos(x+2k\pi)=\cos x$

$\sin(x+2k\pi)=\sin x$

$\cos x=\cos(-x)$

$-\sin x=\sin(-x)$

لكل x من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ لدينا :

$\tan(x+k\pi)=\tan x$

$-\tan x=\tan(-x)$

علاقات مثلثية

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\frac{1}{\tan x}$	$\cos(\pi-x)=-\cos x$ $\sin(\pi-x)=\sin x$ $\tan(\pi-x)=-\tan x$	$\cos(\pi+x)=-\cos x$ $\sin(\pi+x)=-\sin x$ $\tan(\pi+x)=\tan x$

المعادلات المثلثية

ليكن a عددا حقيقيا

$\cos x=a$

إذا كان $a\notin[-1,1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ $(S=\varnothing)$
إذا كان $a=1$ فإن : $S=\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$
إذا كان $a=-1$ فإن : $S=\{\pi+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$
إذا كان $a\in]-1,1[$ فإنه يوجد عدد α وحيد من $]0,\pi[$ حيث $\cos\alpha=a$ و لدينا : $S=\{\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

$\sin x=a$

إذا كان $a\notin[-1,1]$ فإن المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ $(S=\varnothing)$
إذا كان $a=1$ فإن : $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$
إذا كان $a=-1$ فإن : $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$
إذا كان $a\in]-1,1[$ فإنه يوجد عدد α وحيد من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin\alpha=a$ و لدينا : $S=\{\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

$\tan x=a$

يوجد عدد α وحيد من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\tan\alpha=a$ و $S=\{\alpha+k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

المتراجحات المثلثية

(انظر الأمثلة و التمارين)