الجذع المشترك العلمي و التكنولوجي	أولمبياد الرياضيات حلول مقترحة	سلسلة 2

التمارين من اقتراح أذ سمير لخريسي

تمرين 1 :

لدينا $n \in IN^*$ إذن : $n^2 < n^2+n < n^2+2n+1$ منه: $\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+n} < \sqrt{n^2+2n+1}$

منه : $n < \sqrt{n^2+n} < \sqrt{(n+1)^2}$ منه : $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$ إذن $\sqrt{n^2+n}$

محصور بين عددين صحيحين متتابعين ، مما يعيني أن $\sqrt{n^2+n} \notin IN$

تمرين 2 :

لدينا : $3^m - 2^n = 728$ منه : $2^n = 3^m - 728$

من جهة أخرى لدينا 3 عدد فردي إذن 3^n عدد فردي و بما أن 728 عدد زوجي فإن : $3^m - 728$ عدد فردي

إذن 2^n عدد فردي ، و هذا لا يمكن أن يتحقق إلا إذا كان $n=0$

(لأن $2^0 = 1$ ، بينما $2^p = \underbrace{2\times\ldots\times 2}_{p\ fois}$ زوجي حيث p عدد صحيح طبيعي غير منعدم)

إذن: $1 = 3^m - 728$ منه: $3^m = 728+1 = 729$ و بعد تفكيك 729 إلى جذاء أعداد أولية نجد: $729 = 3^6$

بالتالي: $n=0$ و $m=6$

تمرين 3 : لنبين أن : $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2015}} > \sqrt{2015}$

لدينا : $\sqrt{1} < \sqrt{2015}$ منه : $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2015}}$ و أيضا : $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2015}}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{2015}}$ و . . . و $\frac{1}{\sqrt{2014}} > \frac{1}{\sqrt{2015}}$

بجمع هذه المتفاوتات نجد: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2015}}+\frac{1}{\sqrt{2015}}+\frac{1}{\sqrt{2015}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2015}}}_{2014\ fois}$

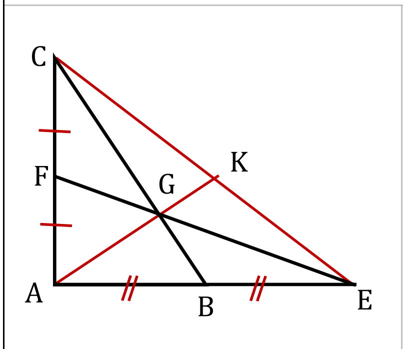
منه: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014}}+\frac{1}{\sqrt{2015}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2015}}+\frac{1}{\sqrt{2015}}+\frac{1}{\sqrt{2015}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2015}}+\frac{1}{\sqrt{2015}}}_{2015\ fois}$

منه: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014}}+\frac{1}{\sqrt{2015}} > \frac{1}{\sqrt{2015}}\times 2015$

منه: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014}}+\frac{1}{\sqrt{2015}} > \frac{2015}{\sqrt{2015}}$ و بما أن : $\frac{2015}{\sqrt{2015}} = \sqrt{2015}$

فإن: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014}}+\frac{1}{\sqrt{2015}} > \sqrt{2015}$

تمرين 4 : ABC مثلث قائم الزاوية في A ، $AB=2$ ، $AC=3$ ، E مماثلة A بالنسبة لـ B ، F منتصف $[AC]$



بما F منتصف $[AC]$ و B منتصف $[AE]$ فإن (BC) و (EF) هما متوسطا المثلث AEC ، إذن نقطة تقاطعهما G هي مركز ثقل هذا المثلث ، إذن و

باعتبار K منتصف $[EC]$ فإن : $AG = \frac{2}{3}AK$

من جهة أخرى في المثلث AEC القائم الزاوية A K منتصف الوتر $[EC]$

إذن: $KA = KE = KG = \frac{CE}{2}$ ، و باستعمال مبرهنة فيثاغورس المباشرة في هذا

المثلث نجد: $CE^2 = AC^2 + AE^2 = 3^2+4^2 = 9+16 = 25$ منه : $CE=5$ ، بالتالي: $\boxed{AG = \frac{2}{3}\times\frac{5}{2} = \frac{5}{3}}$

تمرين 5 : $ABCD$ مربع و (ζ) دائرة لهما نفس المساحة ، لنقارن محيط المربع مع محيط الدائرة

ليكن a طول ضلع المربع $ABCD$ و R شعاع الدائرة (ζ)

إذن لدينا حسب المعطيات : $a^2 = \pi R^2$ منه : $a = \sqrt{\pi} R$

الآن محيط المربع هو $p_1 = 4a$ و محيط الدائرة هو : $p_2 = 2\pi R$

لدينا : $\frac{p_1}{p_2} = \frac{4a}{2\pi R} = \frac{4\sqrt{\pi} R}{2\pi R} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} = \sqrt{\frac{4\pi}{\pi^2}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}$

بما أن: $\pi < 4$ فإن: $\frac{4}{\pi} > 1$ منه: $\sqrt{\frac{4}{\pi}} > 1$ منه: $\frac{p_1}{p_2} > 1$ بالتالي : $p_1 > p_2$ أي محيط المربع هو الأكبر.