# حلول التمارين

## تمرين 1

معطيات : x و y عددان حقيقيان حيث: $x \le y$

| ① لنقارن $3x-7y$ و $-5y+x$ | ② لنقارن $-\frac{2y+8x}{5}$ و $\frac{7x-11y}{2}$ |
|---|---|
| لدينا : $(-5y+x)-(3x-7y)=-5y+x-3x+7y$ $=-2x+2y=2(-x+y)=2(y-x)$ و بما أن $x \le y$ فإن $x-y \le 0$ منه $2(x-y) \le 0$ بالتالي : $-5y+x \le 3x-7y$ | لدينا : $\frac{7x-11y}{2}+\frac{2y+8x}{5}=\frac{5(7x-11y)+2(2y+8x)}{10}$ $=\frac{35x-55y+4y+16x}{10}=\frac{51x-51y}{10}=\frac{51(x-y)}{10}$ و بما أن $x \le y$ فإن $x-y \le 0$ منه $\frac{51(x-y)}{2} \le 0$ بالتالي : $\frac{7x-11y}{2} \le -\frac{2y+8x}{5}$ |

## تمرين 2

| معطيات | $3 \le x \le 6$ | $-7 \le y \le -4$ | $2 \le z \le 5$ | $-10 \le t \le 1$ | $-9 \le k \le -2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | لنؤطر $x+y$ | | لنؤطر $x-y$ | | لنؤطر $6t+2y$ |
| | لدينا : $3 \le x \le 6$ و $-7 \le y \le -4$ إذن : $-7+3 \le x+y \le -4+6$ إذن : $-4 \le x+y \le 2$ | | لدينا : $x-y=x+(-y)$ و لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$ و لدينا : $3 \le x \le 6$ إذن : $3+4 \le x+(-y) \le 6+7$ بالتالي : $7 \le x-y \le 13$ | | لدينا $-10 \le t \le 1$ منه : $-60 \le 6t \le 6$ لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $-14 \le 2y \le -8$ إذن : $-60+(-14) \le 6t+2y \le 6+(-8)$ بالتالي : $-74 \le 6t+2y \le -2$ |
| | لنؤطر $z+t$ | | لنؤطر $z-x$ | | لنؤطر $-y+5x$ |
| | لدينا : $2 \le z \le 5$ و $-10 \le t \le 1$ إذن : $2+(-10) \le z+t \le 5+1$ إذن : $-8 \le z+t \le 6$ | | لدينا : $z-x=z+(-x)$ و لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $-6 \le -x \le -3$ و لدينا : $2 \le z \le 5$ إذن : $2+(-6) \le z+(-x) \le 5+(-3)$ بالتالي : $-4 \le z-x \le 2$ | | لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$ لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $15 \le 5x \le 30$ إذن : $4+15 \le -y+5x \le 7+30$ بالتالي : $19 \le -y+5x \le 37$ |
| | لنؤطر $5x$ | | لانستطيع التأطير مباشرة لأنه لاتوجد قاعدة تسمح بتأطير الفرق | | لنؤطر $-4y-16$ |
| | لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $15 \le 5x \le 30$ | | | | لدينا : $-4y-16=-4y+(-16)$ لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $16 \le -4y \le 28$ منه: $16+(-16) \le -4y+(-16) \le 28+(-16)$ بالتالي : $0 \le -4y-16 \le 12$ |
| | لنؤطر $-6y$ | | | | |
| | لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $24 \le -6y \le 42$ | | | | |
| | لنؤطر $10y$ | | لنؤطر $x^2$ | | |
| | لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $-70 \le 10y \le -40$ | | لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $9 \le x^2 \le 36$ | | |
| | لنؤطر $-4t$ | | لنؤطر $y^2$ | | لنؤطر $x+y-t+6z+13$ |
| | دينا $-10 \le t \le 1$ منه : $-4 \le -4t \le 40$ | | لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$ منه : $16 \le (-y)^2 \le 49$ بالتالي : $16 \le y^2 \le 49$ | | لدينا : $x+y-t+6z+13=x+y+(-t)+6z+13$ لدينا : $3 \le x \le 6$ و : $-7 \le y \le -4$ و لدينا: $-10 \le t \le 1$ منه : $-1 \le -t \le 10$ و لدينا: $2 \le z \le 5$ منه : $12 \le 6z \le 30$ نجمع المتفاوتات فنجد : $20 \le x+y+(-t)+6z+13 \le 55$ |
| | تذكر أنه عندما نضرب متفاوتة في عدد سالب فإننا نغير ترتيب الأطراف. | | لانستطيع تأطير $y^2$ مباشرة لأن المتفاوتة $-7 \le y \le -4$ تحتوي على أعداد سالبة، لذلك نؤطر $-y$ فنحصل على متفاوتة كل أطرافها موجبة، ثم نؤطر $(-y)^2$ ، ثم نستعمل الخاصية: $(-y)^2=y^2$ | | |

## تمرين 2

### لنؤطر $t^2$

لدينا $-10 \le t \le 1$ منه :

$0 \le t \le 1$ أو $-10 \le t \le 0$

$0 \le -t \le 10$ أو $0 \le t \le 1$

منه $0 \le t^2 \le 100$ أو $0 \le (-t)^2 \le 100$

منه $0 \le t^2 \le 1$ أو $0 \le t^2 \le 100$

بالتالي: $\underline{0 \le t^2 \le 100}$

صعوبة هذا التأطير تكمن في كون العدد $t$ مؤطر بين عدد سالب و آخر موجب ، مما يعيق استعمال قاعدة تأطير المربع مباشرة أو حتى تأطير $-t$ ، لذلك نستعمل الحالات : فنؤطر $t$ في الحالة الموجبة ثم في الحالة السالبة ثم نستنتج التأطير من النتائج المحصل عليها.

تذكر أننا نؤطر مستعملين قواعد التأطير و ليس بتطبيق تعبير المجهول على الأعداد.

### لنؤطر $\dfrac{x-t}{y+10z}$

لدينا : $\dfrac{x-t}{y+10z} = (x+(-t)) \times \dfrac{1}{y+10z}$

لدينا : $-10 \le t \le 1$ منه : $-1 \le -t \le 10$

و لدينا : $3 \le x \le 6$

إذن : $2 \le x+(-t) \le 16$

لدينا : $2 \le z \le 5$ منه: $20 \le 10z \le 50$

و لدينا : $-7 \le y \le -4$

إذن : $13 \le y+10z \le 46$

إذن : $\dfrac{1}{46} \le \dfrac{1}{y+10z} \le \dfrac{1}{13}$

منه :

$2 \times \dfrac{1}{46} \le (x+(-t)) \times \dfrac{1}{y+10z} \le 16 \times \dfrac{1}{13}$

بالتالي : $\underline{\dfrac{1}{23} \le \dfrac{x-t}{y+10z} \le \dfrac{16}{13}}$

لاحظ أن التعابير الأخيرة مركبة لذلك فتأطيرها يتطلب كتابتها على شكل جذاءات و مجاميع قصد التمكن من تطبيق قواعد الترتيب.

### لنؤطر $x\,z$

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $2 \le z \le 5$

منه : $\underline{6 \le xz \le 30}$

### لنؤطر $x\,y$

لدينا : $-9 \le k \le -2$ و $-7 \le y \le -4$

منه : $2 \le -k \le 9$ و $4 \le -y \le 7$

منه : $4 \times 2 \le (-y) \times (-k) \le 7 \times 9$

بالتالي : $\underline{8 \le yk \le 63}$

لاحظ أننا استعملنا نفس تقنية تأطير $x\,y$ ، لكننا استفدنا من كون :

$(-x) \times (-y) = xy$

### لنؤطر $\dfrac{z}{x}$

لدينا : $\dfrac{z}{x} = z \times \dfrac{1}{x}$

لدينا : $3 \le x \le 6$ منه : $\dfrac{1}{6} \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{3}$

و لدينا : $2 \le z \le 5$

منه : $2 \times \dfrac{1}{6} \le z \times \dfrac{1}{x} \le 5 \times \dfrac{1}{3}$

بالتالي : $\underline{\dfrac{1}{3} \le \dfrac{z}{x} \le \dfrac{5}{3}}$ أو أيضا : $\dfrac{2}{6} \le \dfrac{z}{x} \le \dfrac{5}{3}$

### لنؤطر $\dfrac{y^2+5}{t-10}$

لدينا : $\dfrac{y^2+5}{t-10} = (y^2+5) \times \dfrac{1}{t+(-10)}$

لدينا : $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $16 \le (-y)^2 \le 49$ أي: $16 \le y^2 \le 49$

منه : $21 \le y^2+5 \le 54$

لدينا : $-10 \le t \le 1$ منه :

$-20 \le t-10 \le -9$

منه : $9 \le -(t-10) \le 20$

منه : $\dfrac{1}{20} \le \dfrac{1}{-(t-10)} \le \dfrac{1}{9}$

إذن :

$21 \times \dfrac{1}{20} \le (y^2+5) \times \dfrac{1}{-(t-10)} \le 54 \times \dfrac{1}{9}$

أي : $\dfrac{21}{20} \le \dfrac{-(y^2+5)}{t-10} \le 6$

بالتالي : $\underline{-6 \le \dfrac{(y^2+5)}{t-10} \le -\dfrac{21}{20}}$

### لنؤطر $y\,k$

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $-7 \le y \le -4$

منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $3 \times 4 \le x \times (-y) \le 6 \times 7$

منه : $12 \le -xy \le 42$

بالتالي : $\underline{-42 \le xy \le -12}$

بما أن قاعدة تأطير جذاء تستوجب أن تكون كل الأعداد موجبة ، فإننا اعتمدنا التقنية التالية : أطرنا $-y$ فتصبح أطراف المتفاوتة $4 \le -y \le 7$ كلها موجبة (حتى $-y$ لأن $y$ سالب)، مما سمح لنا بتأطير الجذاء $-xy$ ، و باستعمال قاعدة تأطير المقابل نستطيع تأطير $xy$.

### لنؤطر $\dfrac{y}{z}$

لدينا : $\dfrac{y}{z} = y \times \dfrac{1}{z}$

لدينا : $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

و لدينا : $2 \le z \le 5$

منه : $\dfrac{1}{5} \le \dfrac{1}{z} \le \dfrac{1}{2}$

منه : $4 \times \dfrac{1}{5} \le (-y) \times \dfrac{1}{z} \le 7 \times \dfrac{1}{2}$

أي : $\dfrac{4}{5} \le \dfrac{-y}{z} \le \dfrac{7}{2}$

بالتالي : $\underline{\dfrac{-7}{2} \le \dfrac{y}{z} \le \dfrac{-4}{5}}$

## تمرين 3

| لنقارن $\sqrt{37}$ و $3\sqrt{5}$ | لنقارن $-\sqrt{3}$ و $-2\sqrt{10}$ | لنقارن $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ |
|---|---|---|
| لدينا : $\left(\sqrt{37}\right)^2=37$ و $\left(3\sqrt{5}\right)^2=9\times5=45$<br>بما أن : $45>37$<br>فإن : $3\sqrt{5}>\sqrt{37}$ | لدينا : $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$<br>و $\left(2\sqrt{10}\right)^2=4\times10=40$<br>بما أن : $40>3$<br>فإن : $2\sqrt{10}>\sqrt{3}$<br>بالتالي : $-2\sqrt{10}<-\sqrt{3}$ | لدينا : $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$<br>و $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$<br>$=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$<br>بما أن : $5+2\sqrt{6}>5$<br>فإن : $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{5}$ |
| لنقارن $\sqrt{17}-\sqrt{11}$ و $\sqrt{5}-\sqrt{40}$ | لاحظ أن العددان سالبان لذلك قارنا مقابليهما قبل مقارنتهما. | لنقارن $6+\sqrt{3}$ و $6+\sqrt{5}$ |
| لدينا $\sqrt{5}<\sqrt{40}$ منه $\sqrt{5}-\sqrt{40}<0$<br>لدينا $\sqrt{17}>\sqrt{11}$ منه $\sqrt{17}-\sqrt{11}>0$<br>بالتالي : $\sqrt{5}-\sqrt{40}<\sqrt{17}-\sqrt{11}$ | | لدينا $\sqrt{5}>\sqrt{3}$ منه : $6+\sqrt{5}>6+\sqrt{3}$ |
| لنقارن $\sqrt{27}+1$ و $3+\sqrt{3}$ | لنقارن $-7\sqrt{14}$ و $20\sqrt{2}$ | لم نقارن المربعين و اكتفينا بمقارنة $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ لوجود العدد 6 في كلتا العددين. |
| لدينا : $\left(3+\sqrt{3}\right)^2=3^2+2\times3\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$<br>$=9+6\sqrt{3}+3=12+6\sqrt{3}$<br>و $\left(\sqrt{27}+1\right)^2=\left(\sqrt{27}\right)^2+2\times\sqrt{27}\times1+1^2$<br>$=27+2\sqrt{9\times3}+1=28+6\sqrt{3}$<br>بما أن : $12+6\sqrt{3}<28+6\sqrt{3}$<br>فإن : $3+\sqrt{3}<\sqrt{27}+1$ | لدينا : $-7\sqrt{14}<0$ و $20\sqrt{2}>0$<br>منه : $20\sqrt{2}>-7\sqrt{14}$<br>العدد الموجب أكبر من العدد السالب، لذلك لا نقارن المربعات | |

## تمرين 4

معطيات : $1,41<\sqrt{2}<1,42$ و $2,23<\sqrt{5}<2,24$

| ① لنؤطـر $A=5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ | ② لنؤطـر $B=\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ |
|---|---|
| لدينا : $1,41<\sqrt{2}<1,42$ منه $7,05<5\sqrt{2}<7,1$<br>و لدينا : $2,23<\sqrt{5}<2,24$ منه $4,46<2\sqrt{5}<4,48$<br>بالتالـي : $11,51<5\sqrt{2}+3\sqrt{5}<11,58$<br>أي : $11,51<A<11,58$ | لنبسط $B$ أولا:<br>$B=\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\left(5+\sqrt{5}\right)\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}+5}{5}=\dfrac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{5}=\sqrt{5}+1$<br>لدينا: $2,23<\sqrt{5}<2,24$ منه : $3,23<\sqrt{5}+1<3,24$<br>بالتالي : $3,23<B<3,24$ |