تمارين محلولة:الجداء السلمي

المستوى : الجذع مشترك علمي
و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: ليكن $\frac{\pi}{4}$ قياسا لزاوية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

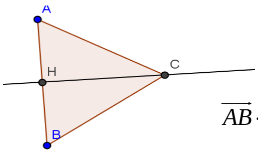
حيث: $\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ و $\|\vec{v}\| = 4$ أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$

الجواب: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

تمرين2: ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 6cm وليكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}$

الجواب: بما أن المثلث متساوي الأضلاع فان كل زواياه متقايسة وقياس كل زاوية هو $\frac{\pi}{3}$ ومنه:



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A} = AB\times AC\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times6\times\frac{1}{2} = 18$$

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB} = \|\overrightarrow{CH}\|\times\|\overrightarrow{HB}\|\times\cos\hat{H} = CH\times HB\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = CH\times HB\times 0 = 0$$

تمرين3: ليكن EFG مثلثا بحيث: $EF = 5$ و $EG = 3$

و $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = -6$ أحسب $\cos\left(\widehat{FEG}\right)$

الجواب: $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = \|\overrightarrow{EF}\|\times\|\overrightarrow{EG}\|\cos\left(\widehat{FEG}\right) = -6$

يعني $EF\times EG\cos\left(\widehat{FEG}\right) = -6$ يعني $5\times3\cos\left(\widehat{FEG}\right) = -6$

يعني $\cos\left(\widehat{FEG}\right) = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

تمرين4: ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 3$ و $AC = 4$

و $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

الجواب: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A} = AB\times AC\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right) = 12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times3\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right) = 12\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) = -12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

لأن : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ اذن :

تمرين5: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بحيث: $\|\vec{u}\| = 5$ و $\|\vec{v}\| = 3$

و $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{3}{2}$ أحسب $\vec{u}^2$ و $\vec{v}^2$ و $(\vec{u}+\vec{v})^2$ و $(\vec{u}-\vec{v})^2$ و

$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$ و $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v})$ و $(5\vec{u}-\vec{v})\cdot(5\vec{u}+\vec{v})$

الجواب: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 5^2 = 25$ و $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 3^2 = 9$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 5^2 + 2\left(-\tfrac{3}{2}\right) + 3^2 = 25-3+9 = 31$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 5^2 - 2\left(-\tfrac{3}{2}\right) + 3^2 = 25+3+9 = 37$$

$$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 5^2 - 3^2 = 25-9 = 16$$

$$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v}) = 3\vec{u}\cdot\vec{u} + 3\vec{u}\cdot5\vec{v} - 2\vec{v}\cdot\vec{u} - 2\vec{v}\cdot5\vec{v}$$

$$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v}) = 3\vec{u}^2 + 15\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 10\vec{v}^2 = 3\times25 + 13\vec{u}\cdot\vec{v} - 10\times9$$

$$(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v}) = 75 + 13\left(-\frac{3}{2}\right) - 90 = -15 - \frac{39}{2} = -\frac{69}{2}$$

$$(5\vec{u}-\vec{v})\cdot(5\vec{u}+\vec{v}) = (5\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 25(\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 25\times25 - 9 = 616$$

تمرين6: ليكن ABC مثلثا قائما في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

بين أن: 1) $AB^2 + AC^2 = BC^2$ 2) $AC\times AB = AH\times BC$

3) $CA^2 = CH\times BC$

الأجوبة: 1) $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$

لدينا : $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AC}$ لأن ABC قائما في A اذن: $BC^2 = BA^2 + AC^2$

2) باعتبار المثلث : (ABC) : $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$

و باعتبار المثلث : (ABH) : $\sin\hat{B} = \frac{AH}{AB}$

ومنه $\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC}$ ومنه : $AC\times AB = AH\times BC$

3) ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

باعتبار المثلث : (ABC) : $\cos\hat{A} = \frac{AB}{AC}$

و باعتبار المثلث : (ABH) : $\cos\hat{B} = \frac{BH}{AB}$

ومنه $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{AC}$ ومنه $AC^2 = CH\times BC$

تمرين7: ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC). أحسب : AC و BH و AH و HC

علما أن : $AB = 2cm$ و $BC = 5cm$

الجواب: حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فان : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

يعني : $AC^2 = BC^2 - AB^2$ يعني : $AC^2 = 5^2 - 2^2 = 21$

يعني : $AC = \sqrt{21}cm$

وحسب العلاقات المترية لدينا: $AB^2 = BH\times BC$

يعني : $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{4}{5}cm$

ولدينا: $AC^2 = CH\times CB$ يعني : $CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{21}{5}cm$

تمرين8: ليكن ABC مثلثا بحيث: $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ و $AC = 8$

و $AB = 5$.

1) أحسب BC 2) $\cos\widehat{ACB}$

الجواب:1) حساب BC

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos\widehat{BAC}$

يعني : $BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2\times 8\times 5\cos\widehat{BAC}$

يعني : $BC^2 = 89-80\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ يعني : $BC^2 = 89-80\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)$

يعني : $BC^2 = 89-80\cos\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$ يعني : $BC^2 = 89-80\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

يعني : $BC^2 = 89-80\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ لأن : $\cos(\pi-x)=-\cos x$

يعني : $BC^2 = 89+80\left(\frac{1}{2}\right)$ يعني : $BC^2 = 89+40$ يعني : $BC^2 = 129$

يعني : $BC=\sqrt{129}$

2) حساب $\cos\widehat{ACB}$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\times BC\cos\widehat{ACB}$

يعني : $5^2 = 8^2 + \left(\sqrt{129}\right)^2 - 2\times 8\times\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني : $25 = 64+129-16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني : $25-193 = -16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$

يعني : $-168 = -16\sqrt{129}\cos\widehat{ACB}$ يعني

: $\cos\widehat{ACB} = \frac{-168}{-16\sqrt{129}} = \frac{168\sqrt{129}}{2064} = \frac{21\sqrt{129}}{258} = \frac{7\sqrt{129}}{86}$

تمرين9: ليكن ABC مثلثا بحيث: $BC=4cm$ و $AC=6cm$ و $AB=3cm$ و لتكن I منتصف $[BC]$ أحسب AI .

الجواب: حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$AB^2+AC^2 = 2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني : $3^2+6^2 = 2AI^2+\frac{1}{2}4^2$

يعني : $9+36 = 2AI^2+\frac{16}{2}$ يعني : $45-8 = 2AI^2$ يعني : $37 = 2AI^2$

يعني : $AI^2 = \frac{37}{2}$ يعني : $AI=\sqrt{\frac{37}{2}}$

تمرين10: ليكن ABM مثلثا بحيث: $AB=4cm$ و $AM=3cm$ و $BM=4cm$

و لتكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AM]$ و K منتصف $[BM]$

أحسب المسافات MI و AK و BJ

الجواب: حساب MI :حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$MA^2+MB^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ يعني : $3^2+4^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}4^2$

يعني : $9+16 = 2MI^2+\frac{16}{2}$ يعني : $25-8 = 2MI^2$ يعني : $17 = 2MI^2$

يعني : $MI^2 = \frac{17}{2}$ يعني : $MI=\sqrt{\frac{17}{2}}$

حساب AK :حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$AB^2+AM^2 = 2AK^2+\frac{1}{2}BM^2$ يعني : $2^2+3^2 = 2AK^2+\frac{1}{2}4^2$

يعني : $25-8 = 2AK^2$ يعني : $17 = 2AK^2$

يعني : $AK^2 = \frac{17}{2}$ يعني : $AK=\sqrt{\frac{17}{2}}$

حساب BJ :حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABM لدينا:

$AB^2+BM^2 = 2BJ^2+\frac{1}{2}AM^2$ يعني : $4^2+4^2 = 2BJ^2+\frac{1}{2}3^2$

يعني : $32-\frac{9}{2} = 2BJ^2$ يعني : $\frac{55}{2} = 2BJ^2$

يعني : $BJ^2 = \frac{55}{4}$ يعني : $BJ=\sqrt{\frac{55}{4}}$ يعني : $BJ=\frac{\sqrt{55}}{2}$

تمرين11: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB=1$ و $AC=\sqrt{2}$ و $CB=2$ ولتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1) بين أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ واستنتج $\cos\hat{A}$

2) اكتب : $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3) أحسب $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ و استنتج طبيعة المثلث ABD

4) أحسب AD

5) ليكن I منتصف القطعة $[BC]$ و J منتصف القطعة $[AC]$

أحسب AI و BJ

الجواب:1) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

ونعلم أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\hat{A} = AB\times AC\times\cos\hat{A}$

اذن : $BC^2 = AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

بالتعويض نجد: $2^2 = 1^2+\sqrt{2}^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

يعني : $4=1+2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ يعني : $1=-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

يعني : $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$

استنتاج : $\cos\hat{A}$:لدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني

: $-\frac{1}{2} = AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني : $-\frac{1}{2} = 1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}$ يعني:

$$\cos\hat{A} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

2) $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ يعني : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

يعني $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$: $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني : $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{DA}$ يعني : $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$

يعني : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(AB^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0$

ومنه : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ وبالتالي $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ أي : ABD قائم الزاوية في A

4) لدينا: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$ اذن : $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\right)^2$

اذن : $AD^2=\frac{1}{9}\left(\left(\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(2\overrightarrow{AC}\right)^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{9}\left(AB^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4AC^2\right)$

$AD^2=\frac{1}{9}\left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times2\right)=\frac{1}{9}(1-2+8)=\frac{7}{9}$ اذن : $AD=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

5) حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني : $1^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}2^2$

يعني : $3=2AI^2+2$ يعني : $3-2=2AI^2$ يعني : $1=2AI^2$

يعني : $AI^2=\frac{1}{2}$ يعني : $AI=\sqrt{\frac{1}{2}}$

حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

يعني: $BA^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$ يعني: $1^2+2^2=2BJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2$

يعني: $5=2BJ^2+1$ يعني: $5-1=2BJ^2$ يعني: $4=2BJ^2$

يعني: $BJ^2=2$ يعني: $BJ=\sqrt{2}$

تمرين12: ليكن ABC مثلثا بحيث : BC= 3 و AC= 2 و AB = $\sqrt{7}$ و ليكن I منتصف القطعة $[BC]$

1)أ)باستعمال مبرهنة الكاشي أحسب $\cos(B\hat{A}C)$

ب)أثبت أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

ج)أحسب AI

2)نعتبر النقطة M بحيث : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

أ) أحسب $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$

ب)بين أن : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MB) و (AC)

الجواب:1)أ)حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

بالتعويض نجد: $9=4+7-4\sqrt{7}\cos(\hat{A})$

يعني: $-2=-4\sqrt{7}\cos(\hat{A})$ يعني

$$\cos(\hat{A})=\frac{2}{4\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$$

1)ب)لدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=2\times\frac{(\sqrt{7})^2}{14}=\frac{14}{14}=1$$

1)ج)حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني: $\sqrt{7}^2+2^2=2AI^2+\frac{1}{2}3^2$

يعني: $11=2AI^2+\frac{9}{2}$ يعني: $\frac{13}{2}=2AI^2$ يعني: $AI^2=\frac{13}{4}$ يعني: $AI=\sqrt{\frac{13}{4}}$

2)أ) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}AC^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times4=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

2)ب) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1=0$

ومنه : $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{AC}$ وبالتالي: $(MB)\perp(AC)$

تمرين13: ليكن ABC مثلثا بحيث: $AB=1$ و $BC=AC=\sqrt{2}$

و D نقطة بحيث $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

1. أحسب CI
2. عبر عن $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
3. بين أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$
4. استنتج أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ و استنتج $\cos\widehat{BAC}$
5. أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ و استنتج طبيعة المثلث BAD
6. نعتبر النقطة M حيث : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

أ. عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$ و أحسب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

ب.بين أن $(MD)\perp(AC)$

الجواب:1)حسب مبرهنة المتوسط على المثلث ABC لدينا:

$BC^2+AC^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$ يعني: $\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}1^2$

يعني: $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ يعني: $\frac{7}{2}=2CI^2$ يعني: $\frac{7}{4}=CI^2$

يعني: $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ يعني: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني: $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني: $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و ABC متساوي الساقين في C

ومنه $(IC)\perp(AB)$ أي $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

وبالتالي : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AI}\|\cos0=AB\cdot AI\cdot1=AB\cdot\frac{AB}{2}\cdot\cos0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

حساب $\cos\widehat{BAC}$ وجدنا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$ يعني $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

يعني $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$ يعني $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ يعني $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5)وجدنا $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ اذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$ أي $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

ومنه BAD قائم الزاوية في A

6)أ) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ يعني $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

يعني $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ يعني $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

يعني $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

حساب $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2AC^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

6)ب) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

يعني $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}==-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}==-\frac{7}{4}\cdot2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$ أي $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$

ومنه $(MD)\perp(AC)$

تمرين14: ليكن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه B بحيث: $AB=\sqrt{2}$

ننشئ خارجه المثلث المتساوي الأضلاع ABD (أنظر الشكل)

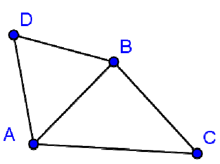
1)أحسب: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

2)أحسب : AC و DC

3)بين أن $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4)تحقق من أن $\widehat{DAC}=\frac{7\pi}{12}$

5)استنتج أن $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$



الجواب:1)

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BD}\|\cos A\hat{B}D=AB\cdot BD\cdot\cos\frac{\pi}{3}=(\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\|\overrightarrow{BC}\|\cdot\|\overrightarrow{BD}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=(\sqrt{2})^2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

2)حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فان: $AC^2=BC^2+AB^2$

يعني $AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ يعني $AC^2=4$ يعني $AC=2$

حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث BCD لدينا:

$DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$DC^2=2+2-2\times2\times-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

يعني $DC^2=4+4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$

يعني $DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

3) حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ACD لدينا:

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

يعني $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

يعني $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) $\widehat{DAC}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

5)وجدنا : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

يعني: $AC\times AD\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

يعني: $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$:يعني

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

تمرين15: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A بحيث:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ و $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$

و I نقطة بحيث $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ و J منتصف القطعة $[BC]$. وليكن

(Δ) المستقيم المار من I والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة Eبحيث : $E\in(\Delta)$

1) أرسم شكلا تقريبيا

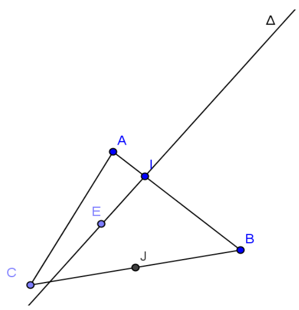
2) بين أن : $AB=8$ وأحسب BC

3) أحسب: $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) بين أن : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) أحسب: AJ

الجواب:1)



2)أ)لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$ يعني

$AB\times AC\times\cos\hat{A}=16$

يعني

يعني $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$

$AB^2\times\frac{1}{4}=16$

يعني $AB^2=64$ يعني

$AB=8$

ب)حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

بالتعويض نجد: $BC^2=64+64-2\times64\times\frac{1}{4}$

يعني : $BC^2=96$ يعني $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ لأن : $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

ومنه : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5)حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

يعني: $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$: $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

يعني : $128=2AJ^2+48$ يعني : $80=2AJ^2$ يعني : $40=AJ^2$

يعني : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

تمرين16: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B

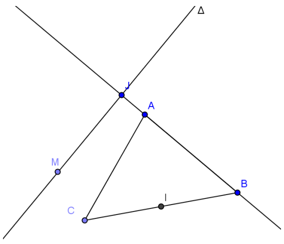
بحيث: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ و $\cos(A\hat{B}C)=\frac{1}{3}$

و J نقطة بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ و I منتصف القطعة $[AC]$. وليكن

(Δ) المستقيم المار من J والعمودي على المستقيم (AB)

ولتكن نقطة بحيث : $M\in(\Delta)$

1. أرسم شكلا تقريبيا
2. بين أن : $AB=6$ وأحسب AC
3. أحسب: $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}$
4. بين أن : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=45$
5. أحسب: BI



الجواب:1)

2)أ)لدينا $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ يعني

$\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos\hat{B}=12$

يعني $BA\times BC\times\cos\hat{B}=12$ يعني $AB^2\times\frac{1}{3}=12$

يعني $AB^2=36$ يعني $AB=6$

ب)حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\hat{B}$

بالتعويض نجد: $AC^2=36+36-2\times36\times\frac{1}{3}$

يعني : $AC^2=54$ يعني $AC=\sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{5}{4}BA^2=\frac{5}{4}\times36=45$

4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}$

لدينا $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ لأن : $\overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{AB}$

ومنه : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=45$

5)حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

يعني : $AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$: $6^2+6^2=2BI^2+\frac{1}{2}\sqrt{54}^2$

يعني : $72=2BI^2+27$ يعني : $45=2BI^2$ يعني : $BI^2=\frac{45}{2}$

يعني : $BI=\sqrt{\frac{45}{2}}$