الهندسة الفضائية

القدرات المنتظرة

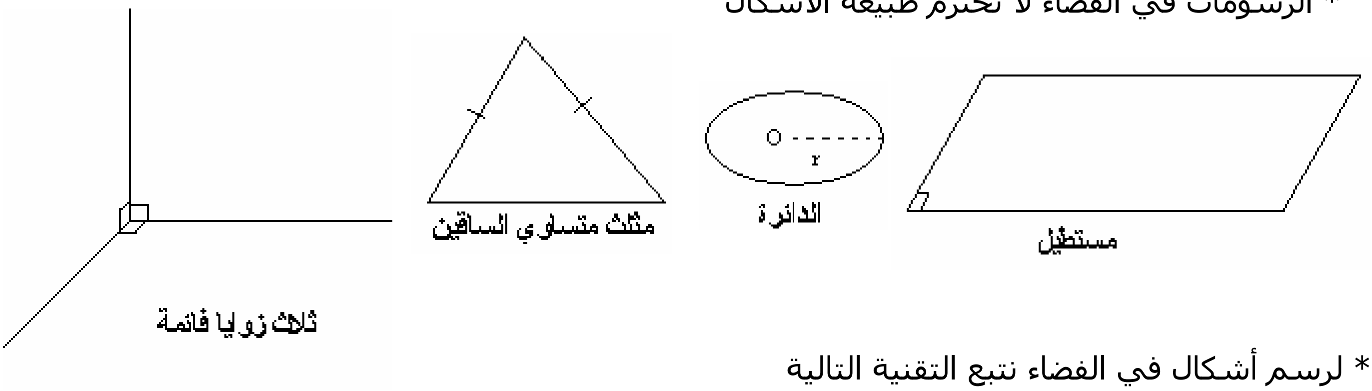
-* تعرف وتمثيل أجزاء في الفضاء على المستوى.
-* إدراك حالات المماثلة وحالات اللامماثلة بين مفاهيم وخاصيات في المستوى ونظيراتها في الفضاء.
-* توظيف خاصيات الهندسة الفضائية في حل مسائل مستقاة من الواقع.

التوازي في الفضاء

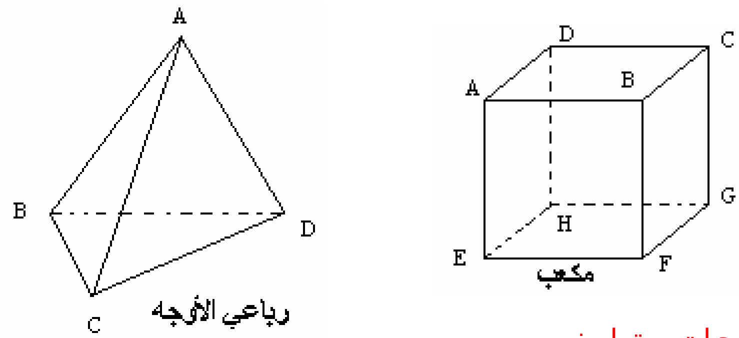
I- تذكير

1- التمثيل المستوى للأشكال في الفضاء

* الرسومات في الفضاء لا تحترم طبيعة الأشكال



* لرسم أشكال في الفضاء نتبع التقنية التالية
- الخطوط المرئية في الواقع نرسمها بخطوط متصلة
- الخطوط الغير المرئية في الواقع نمثلها بخطوط متقطعة
- المستقيمات المتوازية في الواقع نمثلها بمستقيمات متوازي في الرسم
- النقط المستقيمية تمثل بنقط مستقيمية في الرسم.
- قطعتان متقايستان حاملاهما متوازيان نمثلهما بقطعتين متقايستين حامليهما متوازيين



2- موضوعات و تعاريف

الفضاء مجموعة عناصرها تسمى نقط نرمز لها بالرمز(E)
المستقيمات و المستويات أجزاء فعلية من الفضاء

أ- موضوعة1

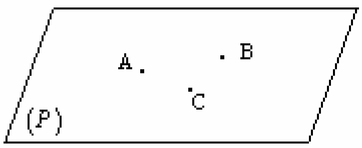
كل نقطتين مختلفتين A و B في الفضاء تحدد مستقيما وحيد نرمز له بـ (AB)

تعريف

نقول عن عدة نقط أنها مستقيمية في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نقس المستقيم

ب- موضوعة2

كل ثلاث نقط غير مستقيمية A و B و C في الفضاء تحدد مستوى وحيد نرمز له بـ(ABC) أو (P)

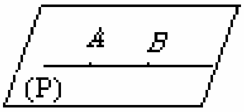


تعريف

* نقول عن عدة نقط أنها مستوائية في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نقس المستوى.
* نقول عن مستقيمين (أو مستقيمات) أنهما مستوئيين(أو مستوائية) إذا كانا (أو كانوا) ضمن نفس المستوى.

ج- موضوعة3

إذا انتمت نقطتان مختلفتان من مستقيم (D) إلى مستوى (P) فان (D) ضمن (P).

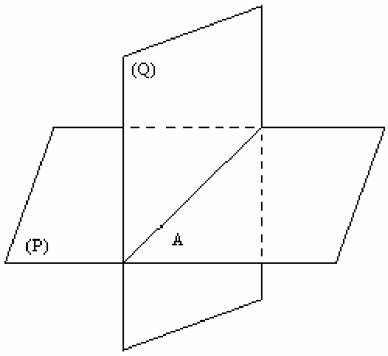


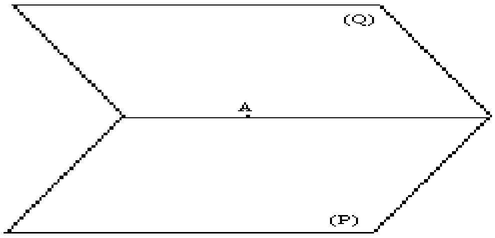
ملاحظة هامة

جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صالحة في كل مستوى من مستويات الفضاء و كل مستقيم من مستقيماته.

د- موضوعة4

إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فانهما يتقاطعان وفق مستقيم يمر من هذه النقطة.





ذ- نتائج

نتيجة1

كل مستقيم ونقطة خارجه يحددان مستوى وحيدا في الفضاء

نتيجة2

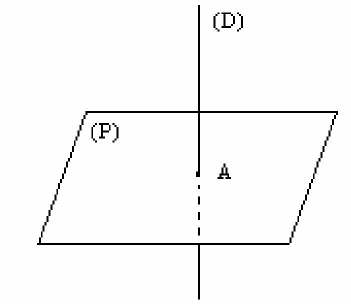
كل مستقيمين متقاطعين في الفضاء يحددان مستوى وحيد في الفضاء

3- الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى

ليكن (D) مستقيم و (P) مستوى من الفضاء

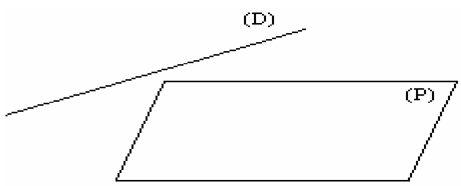
لدينا ثلاث وضعيات ممكنة

الوضعية1: (D) يخترق (P)



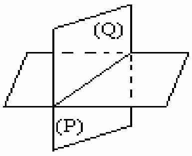
الوضعية2: $(D) \subset (P)$

الوضعية3: (D) و(P) منفصلان (أي ليست لهما أية نقطة مشتركة

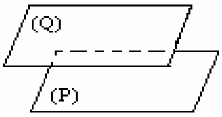


4- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

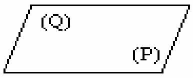
ليكن (P) و (Q) مستويين في الفضاء. لدينا ثلاث حالات



* (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم



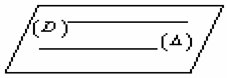
* (P) و (Q) منفصلان
(أي ليست لهما أية نقطة مشتركة)



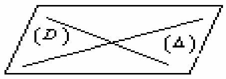
* (P) و (Q) منطبقان

5- الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين

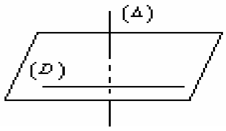
ليكن (D) و (Δ) مستقيمين مختلفين. هناك ثلاث حالات



* (D) و (Δ) مستوئيان ومنفصلان



* (D) و (Δ) مستوئيان ومتقاطعان



* (D) و (Δ) غير مستوئيين

<u>تمرين</u>

ليكن $EFGH$ رباعي الأوجه النقطة I من $[FG]$ مخالفة عن F و G و النقطة J من $[EG]$ مخالفة عن E و G و النقطة K من $[EH]$ مخالفة عن E و H

هل (EI) و (JK) متقاطعان

<u>تمرين</u>

$ABCDEFGH$ مكعب

حدد تقاطع (ACG) و (BDG)

للبرهنة على استقامية نقط في الفضاء ، نبحث غالبا على مستويين متقاطعين و نبين أن هذه النقط مشتركة

<u>تمرين</u> $ABCD$ رباعي الأوجه و P و Q و R نقط من $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ حيث (PR) يقطع (BD) في J و (PQ) يقطع (BC) في K و (QR) يقطع (CD) في I

أثبت أن J و K و I مستقيمية

التوازي في الفضاء

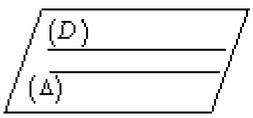
1- المستقيمات المتوازية

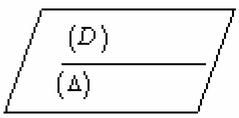
أ- تعريف

نقول إن مستقيمين (D) و (Δ) متوازيان في الفضاء إذا تحقق الشرطان التاليان

- أن يكون (D) و (Δ) مستوائيين
- أن يكون (D) و (Δ) منفصلان أو منطبقان

نكتب $(D)//(\Delta)$





<u>ملاحظة</u>

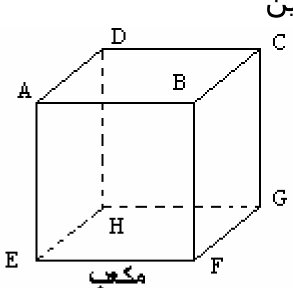
لا يكفي أن يكون (D) و (Δ) منفصلين لكي يكون متوازيين

مثال

(AE) و (BC) منفصلان و لكن غير متوازيين.

$(BC)//(AD)$

$(EF)//(DC)$

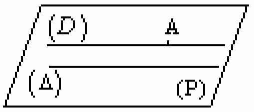


مكعب

ب- مبرهنة

من نقطة معلومة خارج مستقيم يمر مستقيم وحيد يوازيه في الفضاء

البرهان



لدينا $A \notin (D)$ و بالتالي يوجد مستوى

وحيد (P) يحتوي على A و (D)

وحسب موضوعة اقليدس في المستوى (P) ، يمر مستقيم وحيد

(Δ) يوازي (D)

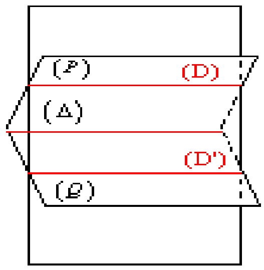
إذن (D) و (Δ) متوازيان في الفضاء

ج- مبرهنة

كل مستقيمين متوازيين قطعا في الفضاء يحددان مستوى وحيدا

د- مبرهنة (نقبلها)

إذا احتوى مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعا فان تقاطعهما هو مستقيم مواز لهذين المستقيمين.



ذ- مبرهنة

إذا كان مستقيمان متوازيين في الفضاء فن كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

ملاحظة

إذا كان مستقيمان متوازيين فكل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر

تمرين

ليكن $ABCDE$ هرما قاعدته متوازي أضلاع لتكن B' و C' منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي.

أنشئ الشكل

1- أثبت أن $(DE)//(B'C')$

2- ليكن (Δ) تقاطع المستويين (ABC) و (ADE)

بين أن $(\Delta)//(B'C')$

2- توازي مستقيم و مستوى

أ-تعريف

يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا كان (D) و (P) منفصلان أو (D) ضمن (P)

نكتب $(D)//(P)$

ب- مبرهنة

يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا وجد مستقيم ضمن (P) يوازي (D)

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا . I و J و K منتصفات $[AB]$

و $[EF]$ و $[HG]$ على التوالي

أثبت أن (HI) يوازي المستوى (JKC)

3- توازي مستويين

أ- تعريف

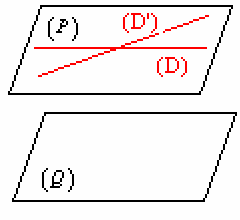
يكون مستويان (P) و (Q) متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا كانا منطبقين أو منفصلين.

نكتب $(P)//(Q)$

ملاحظة
إذا كان $(P)//(Q)$ فان كل مستقيم ضمن أحدهما يوازي المستوى الآخر.

ب- مبرهنة

يكون مستويان متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين يوازيين المستوى الآخر



ج- مبرهنة

إذا وازى مستويان مستوى ثالثا فانهما يكونان متوازيين

د- مبرهنة

من نقطة في الفضاء يمر مستوى و حيد مواز لمستوى معلوم

البرهان
ليكن (P) مستوى و A نقطة في الفضاء
نعتبر (D) و (Δ) متقاطعين ضمن المستوى (P)
يوجد مستقيم وحيد (D') مار من A و يوازي (D)
يوجد مستقيم وحيد (Δ') مار من A و يوازي (Δ)
(D') و (Δ') يحدان مستوى وحيد (Q)
(Q) يوازي (P)

ذ- نتائج

- إذا توازى مستويان فان كل مستقيم يخترق أحدهما يخترق الآخر - إذا توازى مستويان فان كل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر - إذا توازى مستويان فان كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

تمرين
ليكن (P) و(Q) مستويين متوازيين قطعا . نعتبر $A \in (P)$
و BCD مثلث ضمن (Q) . لتكن I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ على التوالي. المستقيم (CK) يخترق المستوى (P) في R.
1- أنشئ الشكل
2- أتبث أن المستوى (IJK) يوازي (P)
3- أتبث أن $(CD)//(AR)$

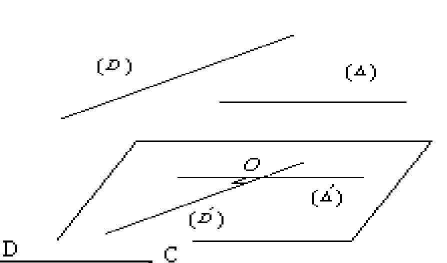
تمرين
ليكن $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات و I منتصف $[GH]$
1- لتكن $(EI)\cap(FH)=\{M\}$
بين أن المستويين (AEI) و (AFH) يتقاطعان وفق (AM)
2- أ- بين أن النقط E و F و D و C مستوائية
ب- بين أن $(CF)//(DE)$
3- بين أن $(CFH)//(BDE)$
4- بين أن (CI) يخترق المستوى (ADH)

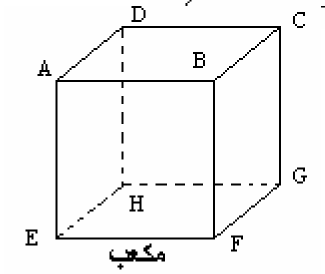
التعامد في الفضاء

I- تعامد مستقيمين في الفضاء

1- تعريف

نقول إن مستقيمين (D) و(Δ) متعامدان في الفضاء إذا و فقط إذا كان الموازيان لهما و الماران من نقطة O في الفضاء متعامدين. نكتب $(D)\perp(\Delta)$





مثال $ABCDEFGH$ مكعب

$(AD)\perp(AE)$

$(AD)\perp(CG)$

$(EF)\perp(DH)$

ملاحظة

مستقيمان متعامدان يمكن أن يكونا غير مستوائيين

تمرين

$ABCD$ رباعي الأوجه حيث $BD=DC$ و I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[CB]$ على التوالي

بين أن $(IJ)\perp(DK)$

2- خاصيات

خاصية1

إذا كان مستقيمان متوازيين فكل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر

خاصية2

إذا كان مستقيمان متعامدين فكل مستقيم مواز لأحدهما يكون عموديا على الآخر

ملاحظة

يمكن لمستقيمين أن يكون عموديين على مستقيم ثالث دون أن يكونا متوازيين.

II- تعامد مستقيم و مستوى في الفضاء

1- مبرهنة

إذا كان مستقيم (D) عمودي على مستقيمين متقاطعين ضمن مستوى (P) فان (D) عمودي على جميع مستقيمات المستوى (P)

2- تعريف

نقول إن المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) إذا و فقط إذا (D) عموديا على جميع مستقيمات المستوى (P).

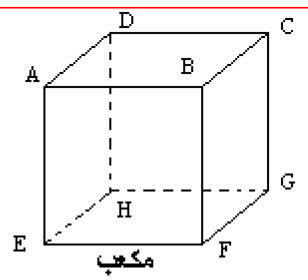
3- مبرهنة

يكون مستقيم (D) عمودي على مستوى (P) إذا و فقط إذا كان المستقيم (D) عمودي على مستقيمين متقاطعين ضمن المستوى (P)

مثال $ABCDEFGH$ مكعب

$(AD)\perp(ABE)$

$(AD)\perp(CHG)$



4- خاصيات

خاصية1

إذا كان مستويان متوازيين فان كل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر

خاصية2

إذا كان مستقيمان متوازيين فان كل مستوى عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر

خاصية4

يكون مستقيمان متعامدين إذا و فقط إذا كان أحدهما عمودبا على مستوى يتضمن الآخر

خاصية5

يكون مستويان متوازيين إذا وفقط إذا كانا عموديين على نفس المستقيم

تمرين

$ABCDEFGH$ مكعب

أتبث أن $(EB)\perp(DF)$ ثم أتبث أن $(EBG)\perp(DF)$

تمرين

ليكن (C) دائرة من المستوى (P). نعتبر $[AB]$ قطرا لـ (C) و(Δ) العمودي على (P) في A.

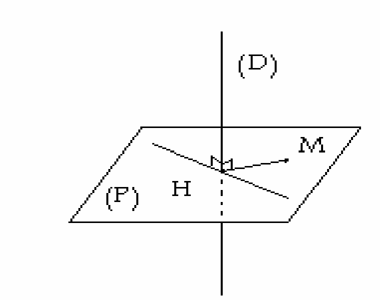
ليكن $S\in(\Delta)$ حيث $S\neq A$ و $M\in(C)$; $M\neq B$

أتبث أن $(MB)\perp(SM)$.

5- مبرهنات

مبرهنة1

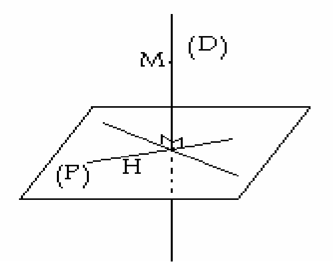
من كل نقطة في الفضاء يمر مستوى وحيد عمودي على مستقيم معلوم.



H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D)

مبرهنة2

من كل نقطة في الفضاء يمر مستقيم وحيد عمودي على مستوى معلوم.



H المسقط العمودي للنقطة M على المستوى (P)

III- تعامد مستويين

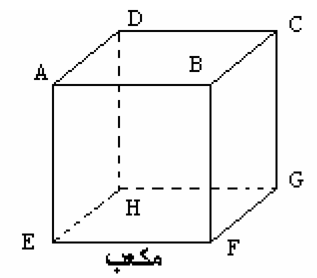
تعريف

نقول ان المستويين (P) و (Q) متعامدان اذا و فقط اذا كان أحدهما يتضمن مستقيما عموديا على الآخر نكتب $(P)\perp(Q)$

مثال $ABCDEFGH$ مكعب

$(ADC)\perp(ABE)$

$(ADF)\perp(CHG)$



ملاحظة

إذا تعامد مستويين في الفضاء فلا يعني أن كل مستقيم ضمن أحدهما عمودي على المستوى الآخر.

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين في A ضمن مستوى (P) و I منتصف $[BC]$. لتكن S نقطة من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $S\neq A$

1- أتبث أن $(SAI)\perp(SCI)$

2- ليكن H المسقط العمودي لـ A على (SI)

أتبث أن $(AH)\perp(SC)$

تمرين

$ABCDEFGH$ مكعب

أتبث أن $(HEB)\perp(AGF)$

تمرين

في الفضاء نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A ضمن مستوى (P). لتكن D مماثلة B بالنسبة لـ A ، و S نقطة خارج (P) حيث $SB=SD$. لتكن I و J منتصفي $[SD]$ و$[DC]$ على التوالي

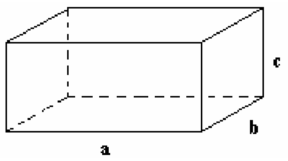
1- بين أن $(AB)\perp(SAC)$ استنتج أن $(P)\perp(SAC)$

2- بين أن $(AB)\perp(IJ)$

المساحات و الحجوم

1- متوازي المستطيلات

ليكن a و b و c طول و عرض و ارتفاع متوازي المستطيلات

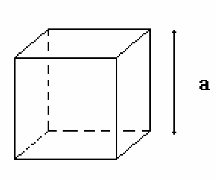


المساحة : $S = 2(ab + bc + ca)$

الحجم: $V = a.b.c$

2- المكعب

ليكن a طول حرف المكعب

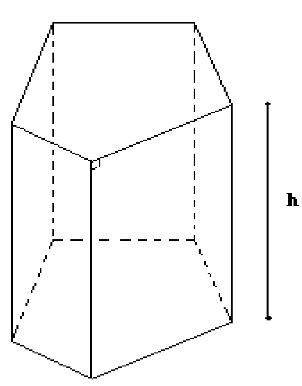


المساحة الكلية $S = 6a^2$

الحجم $V = a^3$

3 - الموشور القائم

أ- ليكن h ارتفاع موشور قائم و l و B محيط و مساحة قاعدته على التوالي.



*** المساحة الجانبية** $S = l \times h$

*** المساحة الكلية**

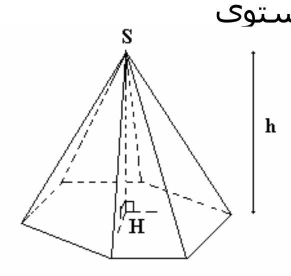
$S_T = l \times h + 2B$

*** الحجم** $V = B \times h$

4- الهرم

أ- ليكن h ارتفاع هرما رأسه S

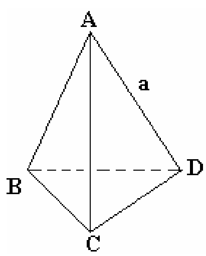
$h = SH$ حيث H المسقط العمودي لـ S على المستوى المتضمن للقاعدة. ليكن B مساحة قاعدة الهرم.



حجم الهرم: $V = \frac{1}{3}B.h$

5 - رباعي الأوجه المنتظم

ليكن a طول حرف رباعي الأوجه منتظم

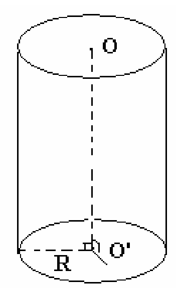


المساحة الجانبية $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$

الحجم $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

6 - الأسطوانة القائمة

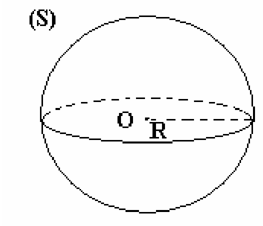
ليكن h ارتفاع الاسطوانة و R شعاع قاعدتها



المساحة الجانبية هي $S_L = 2\pi Rh$

الحجم هو $V = \pi R^2 h$

6- الفلكة

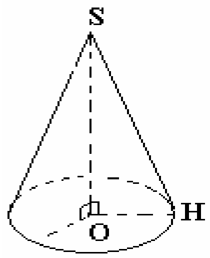


ليكن R شعاع الفلك

المساحة هي: $S = 4\pi R^2$

الحجم هو: هي $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

7 - المخروطي الدوراني



ليكن R شعاع القاعدة لمخروط دوراني

المساحة الجانبية هي $S_L = \pi R \cdot SH$

الحجم: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$h = OS$

تمرين $ABCD$ رباعي الأوجه حيث $BD = DC$ و I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[CB]$ على التوالي

بين أن $(IJ) \perp (DK)$

تمرين $ABCDEFGH$ مكعب

أتبث أن $(EB) \perp (DF)$ ثم أتبث أن $(EBG) \perp (DF)$

تمرين ليكن (C) دائرة من المستوى (P). نعتبر $[AB]$ قطرا لـ (C) و (Δ) العمودي على (P) في A.

ليكن $S \in (\Delta)$ حيث $S \neq A$ و $M \in (C)$; $M \neq B$

أتبث أن $(MB) \perp (SM)$.

تمرين ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين في A ضمن مستوى (P) و I منتصف $[BC]$. لتكن S نقطة من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $S \neq A$

3- أتبث أن $(SAI) \perp (SCI)$

4- ليكن H المسقط العمودي لـ A على (SI)

أتبث أن $(AH) \perp (SC)$

تمرين $ABCDEFGH$ مكعب

أتبث أن $(HEB) \perp (AGF)$

تمرين في الفضاء نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A ضمن مستوى (P). لتكن D مماثلة B بالنسبة لـ A ، و S نقطة خارج (P) حيث $SB = SD$. لتكن I و J منتصفي $[SD]$ و $[DC]$ على التوالي

3- بين أن $(AB) \perp (SAC)$ استنتج أن $(P) \perp (SAC)$

4- بين أن $(AB) \perp (IJ)$

تمرين ليكن $ABCD$ معينا ضمن مستوى (P) حيث $BD = 3cm$ و $AC = 3cm$. لتكن S نقطة من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $SA = 8cm$

أحسب حجم الهرم $SABCD$

تمرين أحسب حجم فلكة مساحتها تساوي $1m^2$