تمارين محلولة: الحدوديات

المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1 : حدد من بين التعابير التالية الحد وديات و درجتها ان أمكن: حيث: $a\in\mathbb{R}$

$P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}$ و $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$

$R(x)=5|x^2|+4|x|-5$ و $M(x)=\frac{5}{3}x^2+x+2-7x^4$

$N(x)=x^2+\frac{1}{x}+3$ و $O(x)=4$ و $E(x)=(a-1)x^4+x^2+x+1$

الجواب : $P(x)$ حدودية.و $d^\circ P=3$ و $Q(x)$ ليست بحدودية.

و $R(x)$ ليست بحدودية.

$M(x)$ حدودية. و $d^\circ P=4$

$N(x)$ ليست بحدودية.

$O(x)$ حدودية. و $d^\circ P=0$

$E(x)$ حدودية.

الحالة1 : $a=1$ $d^\circ P=2$ **الحالة2 :** $a-1\neq0$ يعني $a\neq1$ $d^\circ P=4$

تمرين2 : نعتبر الحدوديتين التاليتين :

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ و $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$

1. حدد درجة الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$
2. ماذا تلاحظ ؟

الجواب:1) $d^\circ P=3$

لايمكن تحديد درجة الحدودية $Q(x)$ الا بعد النشر والتبسيط

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ ومنه $d^\circ Q=3$

2) نلاحظ أيضا أن معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية

اذن : $P(x)=Q(x)$

تمرين3: نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=(a-1)x^3+2ax^2+5x+6$

و $Q(x)=2x^3+4x^2+(3+a)x+3a$.

حيث a عدد حقيقي يخالف 1. لنحدد قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتين.

الجواب :

$a\neq1$ اذن : $a-1\neq0$ ومنه : $d^\circ P=3$ ولدينا أيضا $d^\circ Q=3$

إذن: $d^\circ P=d^\circ Q$

$P(x)=Q(x)$ يعني أن : $\begin{cases} a-1=1 \\ 2a=4 \\ 3+a=5 \\ 3a=6 \end{cases}$ يعني $a=2$

تمرين4 : أدرس تساوي الحدوديتين في الحالات التالية:

1. $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x$ و $Q(x)=x^2(3x-2)+x$
2. $P(x)=(x-1)^3$ و $Q(x)=x^3-3x^2-3x+1$

الجواب : 1)

$P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x=x^3+2x^3-2x^2+x=3x^3-2x^2+x$

$Q(x)=x^2(3x-2)+x=3x^3-2x^2+x=P(x)$

2) $P(x)=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

إذن: $P(x)\neq Q(x)$ لأن معاملات الحد من الدرجة 1 غير متساوية $(3\neq-3)$

تمرين5 : أحسب مجموع الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث:

$P(x)=x^2+x+1$ و $Q(x)=x^3-x^2+2$

ثم قارن : $d^0(P+Q)......d^0P+d^0Q$

الجواب : لدينا: $P(x)+Q(x)=(x^2+x+1)+(x^3-x^2+2)=x^3+x+3$

اذن : $d^0(P+Q)\leq d^0P+d^0Q$

تمرين6: نعتبر الحدوديتين التاليتين :

$P(x)=5x^3-2x^2+3x+1$ و $Q(x)=-2x^3+5x^2-2x-1$

حدد : $P(x)+Q(x)$ و $P(x)-Q(x)$

الجواب: $P(x)+Q(x)=5x^3-2x^2+3x+1-2x^3+5x^2-2x-1$

$P(x)+Q(x)=3x^3+3x^2+x$

$P(x)-Q(x)=(5x^3-2x^2+3x+1)-(-2x^3+5x^2-2x-1)$

$P(x)-Q(x)=5x^3-2x^2+3x+1+2x^3-5x^2+2x+1$

$P(x)-Q(x)=7x^3-7x^2+5x+2$

تمرين7 : أحسب جذاء الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث:

$P(x)=x^2+x+1$ و $Q(x)=x^3-x^2+2$

ثم قارن : $d^0(P\times Q)......d^0P+d^0Q$

الجواب: لدينا: $P(x)\times Q(x)=(x^2+x+1)\times(x^3-x^2+2)$

$=x^5-x^4+2x^2+x^4-x^3+2x+x^3-x^2+2$

$=x^5+x^2+2x+2$

اذن : $d^0(P(x)\times Q(x))=d^0P(x)+d^0Q(x)$

تمرين8: نعتبر الحدودية بحيث: $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

هل الأعداد 1 و 2 و 3 و-2 جذور للحدودية $P(x)$ ؟

الجواب: $P(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=1-2-5+6=0$

1 جذر للحدودية $P(x)$

$P(2)=2^3-2\times2^2-5\times2+6=8-8-10+6=-4\neq0$

2 ليس بجذر للحدودية $P(x)$

$P(3)=3^3-2\times3^2-5\times3+6=27-18-15+6=0$

3 جذر للحدودية $P(x)$

$P(-2)=(-2)^3-2\times(-2)^2-5\times(-2)+6=-8-8+10+6=0$

نقول -2 جذر للحدودية $P(x)$

<u>تمرين 9:</u> نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^2-x-1$

1. بين أن 1 جذر للحدودية $P(x)$
2. تأكد أن: $P(x)=(x-1)(2x+1)$

<u>الجواب:</u> 1) $P(1)=2\times1^2-1-1=0$ اذن 1 جذر للحدودية $P(x)$

2) $(x-1)(2x+1)=2x\times x+x-2x-1=2x^2-x-1=P(x)$

اذن $P(x)=(x-1)(2x+1)$

نقول $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$

<u>تمرين 10:</u> نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث:

$P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

1. بين أن -3 جذر للحدودية $P(x)$
2. حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x)=(x+3)Q(x)$

<u>الجواب:</u> 1) -3 جذر للحدودية: لأن $P(-3)=0$

2) إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x+3$, و منه توجد حدودية $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=(x+3)Q(x)$ لدينا $P(x)$ درجتها 3.و

$R(x)=x+3$ درجتها 1

إذن $Q(x)$ درجتها 2 و بالتالي $Q(x)$ تكتب على شكل:

$Q(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq0)$

تحديد $Q(x)$:

الطريقة 1: لدينا: $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$P(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$

يعني أن: $x^3+3x^2-2x-6=(x+3)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$

$=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$

حسب خاصية تساوي حدوديتين لدينا: $a=1$ و $b+3a=3$ و $c+3b=-2$ و $3c=-6$

يعني أن: $a=1$ و $b=0$ و $c=-2$ اذن: $Q(x)=x^2-2$.

الطريقة 2: $=(x+3)(x^2-2)$

$P(x)=x^3+3x^2-2x-6=x^2(x+3)-2(x+3)$

و منه $Q(x)=x^2-2$

الطريقة 3: انجاز القسمة الاقليدية

<u>مراحل انجاز القسمة الاقليدية:</u>

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-2x-6 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2 & x^2-2 \\ \cline{1-1} -2x-6 & \\ 2x+6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

<u>تمرين 11:</u> نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1. بين أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$
2. حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x)=(x-3)\times Q(x)$

<u>الجواب:</u> 1) 3 جذر للحدودية: لأن $P(3)=0$ ومنه $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

2) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-3$ فنجد :

$P(x)=(x-3)\times(2x^2+x-1)$

<u>تمرين 12:</u> نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^2+x-3$

1. بين أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$
2. عمل الحدودية $P(x)$

<u>الجواب:</u> 1) 1 جذر للحدودية: لأن $P(1)=0$ ومنه $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$

2) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-1$ فنجد :

$P(x)=(x-1)\times(2x+3)$ ومنه نجد تعميلا للحدودية $P(x)$

<u>تمرين 13:</u> نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

و $Q(x)=x^2-4x+3$.

1. أنجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x+2$.
2. وبين أن $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$.
3. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

<u>الجواب:</u> 1)

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^3-2x^2 & x^2-4x+3 \\ \cline{1-1} -4x^2-5x+6 & \\ 4x^2+8x & \\ \cline{1-1} 3x+6 & \\ -3x-6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2) 3 جذر للحدودية $Q(x)$: لأن $Q(3)=0$ ومنه $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

3) وجدنا حسب السؤال 1 $P(x)=(x+2)\times(x^2-4x+3)$

وجدنا حسب السؤال 2 $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $Q(x)$ على $x-3$

فنجد : $Q(x)=(x-3)\times(x-1)$

ومنه: $P(x)=(x+2)\times(x-3)\times(x-1)$

<u>تمرين 14:</u> نعتبر الحدودية $P(x)$ المعرفة بما يلي:

$$P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$$

1) تحقق من أن 0 ليس جذرا للحدودية $P(x)$.

2) بين أنه إذا كانت α جذرا للحدودية $P(x)$ فان $\frac{1}{\alpha}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$.

3) بين أن العدد 2 جذر للحدودية $P(x)$.

4) بانجاز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-2$ حدد الحدودية $Q(x)$ حيث: $P(x)=(x-2)Q(x)$

5) استنتج أن: $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون:

$$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c)$$

7) استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

<u>الجواب:</u> 1) $P(0)=2\neq0$ ومنه 0 ليس جذرا للحدودية $P(x)$.

2) α جذر للحدودية $P(x)$ يعني $P(\alpha)=0$ يعني :

$$2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$$

نحسب : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=?$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+14\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha^4}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)+14\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{14\alpha^2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha^3}{\alpha^4}\right)+2\frac{\alpha^4}{\alpha^4}$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2-9\alpha+14\alpha^2-9\alpha^3+2\alpha^4}{\alpha^4}$$

وبما أنه لدينا : $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

فان : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{0}{\alpha^4}=0$

ومه $\frac{1}{\alpha}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$.

3) $P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2$

$P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2=0$

ومه العدد 2 جذر للحدودية $P(x)$.

4) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-2$

فنجد : $P(x)=(x-2)\times(2x^3-5x^2+4x-1)$

5) وجدنا حسب سؤال سابق أن 2 جذر للحدودية $P(x)$

اذن حسب السؤال **2) فان** $\frac{1}{2}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$

يعني : $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$ وحيث أنه لدينا : $P(x)=(x-2)Q(x)$

فان : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\times Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ أي $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ لأن : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\neq0$

6) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $Q(x)$ على $x-\frac{1}{2}$ فنجد:

$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$ أي: $a=2$ و $b=-4$ و $c=2$

7) لدينا $P(x)=(x-2)Q(x)$ و $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

اذن: $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

يجب أيضا تعميل : $2x^2-4x+2$

بملاحظة أن 1 جذر للحدودية $2x^2-4x+2$

وبقسمة $2x^2-4x+2$ على $(x-1)$

نجد أن: $2x^2-4x+2=(x-1)(2x-2)$

وبالتالي: $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)$

$$P(x)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$$