

I. تقديم حدودية و تساوي حدوديتين:

(1) تقديم حدودية: أمثلة و تعاريف: مثال 1:

التعبير $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - \frac{1}{3}$ يسمى حدودية و $\frac{1}{2}x^3$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 3. و $-\sqrt{2}x^2$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 2. x يسمى حد الحدودية من الدرجة 1. $-\frac{1}{3}$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 0 و يسمى كذلك الحد الثابت.

الحد الأكبر درجة هو $\frac{1}{2}x^3$, العدد 3 يسمى درجة الحدودية. و نكتب $d^0 P = 3$

مثال 2: كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و نكتب على شكل: $ax + b$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$.

مثال 3: التعبير $x^2 + 2\sqrt{x} + 5$ ليس بحدودية لأنها تحتوي على \sqrt{x} .

مثال 4: الحدودية: $P(x) = 3x^4 + x^3 - 7x + \sqrt{3}$ درجاتها 4.

3 هو معامل الحد من الدرجة 4. 1 هو معامل الحد من الدرجة 3, 0 هو معامل الحد من الدرجة 2.

-7 هو معامل الحد من الدرجة 1, $\sqrt{3}$ هو معامل الحد من الدرجة 0.

نرمز عادة لحدودية بأحد الرموز: $P(x)$ أو $Q(x)$ أو $R(x)$ أو $S(x)$

نعتبر الحدودية: $P(x) = 4x^2 - x^3 + x^4 + 3 + x$.

يمكن كتابة الحدودية $P(x)$:

❖ إما على شكل: $P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 3$ و نقول إننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التزايدية.

❖ إما على شكل: $P(x) = 3 + x + 4x^2 - x^3 + x^4$ و نقول أننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التناقصية.

** تمرين تطبيقي : (01 - س)

(2) تعريف: الحدودية المنعدمة هي الحدودية التي جميع معاملاتهما تساوي صفرا. أي $P(x) = 0$ لكل x من \mathbb{R} .

ملحوظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

(3) تساوي حدوديتين:

خاصية: تكون حدوديتان متساويتين اذا و فقط اذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

مثال: نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث: $P(x) = (a-1)x^3 + 2ax^2 + 5x + 6$ و $Q(x) = x^3 + 4x^2 + (3+a)x^2 + 3a$

حيث a عدد حقيقي يخالف 1. لنحدد قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتين.

** تمرين تطبيقي : تساوي حدوديتين (05 - س)

II. جمع و ضرب حدوديتين:

مثال 1: أحسب مجموع الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث: $P(x) = x^2 + x + 1$ و $Q(x) = x^3 - x^2 + 2$. ثم قارن:

$$d^0(P+Q) \dots \dots d^0P + d^0Q$$

خاصية 1: مجموع حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x) + Q(x)$.

خاصية 2: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا: $d^0(P+Q) \leq d^0P + d^0Q$ في حالة $P(x) + Q(x)$ حدودية غير منعدمة.

مثال 2: أحسب جداء الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث: $P(x) = x^2 + x + 1$ و $Q(x) = x^3 - x^2 + 2$. ثم قارن:

$$d^0(P \times Q) \dots \dots d^0P + d^0Q$$

خاصية 3: جداء حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x) \times Q(x)$.

خاصية 4: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا: $d^0(P \times Q) = d^0P + d^0Q$

** تمرين تطبيقي : (08 - س)

III. القسمة الاقليدية لحدودية على $x - \alpha$:

(1) خاصية و تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \in \mathbb{N}$ و α عددا حقيقيا.
توجد حدودية $Q(x)$, درجتها $n-1$ بحيث: $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$
الحدودية $Q(x)$ تسمى خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$.
العدد الحقيقي $P(\alpha)$ يسمى باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x - \alpha$.

مثال: لدينا $x^2 - 3 = (x - 2)(x + 2) + 1$ نقول في هذه الحالة, ان $x - 2$ هو خارج القسمة الاقليدية للحدودية $P(x) = x^2 - 3$ على $x + 2$ و 1 هو باقي القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x + 2$.

(2) جذر حدودية:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا.
نقول ان α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان: $P(\alpha) = 0$. α يسمى أيضا صفرا للحدودية $P(x)$.

أمثلة: 3- جذر للحدودية: $P(x) = x^2 + 2x - 3$ لأن $P(-3) = 0$ و 1 جذر للحدودية $P(x)$ لأن $P(1) = 0$.
2 ليس جذرا للحدودية $P(x)$ لأن $P(2) = 5$.

**** تمرين تطبيقي : (09 - س)**

(3) قابلية القسمة على $x - \alpha$:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.
 $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$ بحيث: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

خاصية: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n \geq 1$ و α عددا حقيقيا.
 $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا و فقط إذا كان α جذرا للحدودية $P(x)$.

برهان:

**** تمرين تطبيقي : (10 - س)**

**** تمرين تطبيقي : (11 - س)**

مراحل انجاز القسمة الاقليدية:

1. نضع مكان النقطة الحد المناسب بحيث اذا ضربناه في x نجد: x^3 هذا الحد هو x^2 (لأن $x^3 = x \cdot x^2$)
2. نقوم بضرب x^2 في $x + 3$, فنحصل على $x^3 + 3x^2$ ثم نضع مقابل $x^3 + 3x^2$ أي $-x^3 - 3x^2$ تحت $P(x)$.
3. نقوم بعملية الجمع بين $P(x)$ و $-x^3 - 3x^2$ نحصل على $2x^2 - 4x + 3$.
4. نعيد نفس المراحل المتبعة في 1 و 2 و 3 مع $2x^2 - 4x + 3$ و $x + 3$. و نتوقف عن المراحل 1 و 2 و 3 عندما يكون الباقي عددا حقيقيا معلوما (ثابت).

نعيد نفس الطريقة المتبعة في السؤال 1, لكن في السؤال الثاني نلاحظ أن $P(x)$ لا يحتوي على حد من الدرجة الثانية لذا وجب تعويضه ب $0 \cdot x^2$ لكي تتم العمليات عند وضع القسمة بشكل سليم و تجنب الأخطاء.