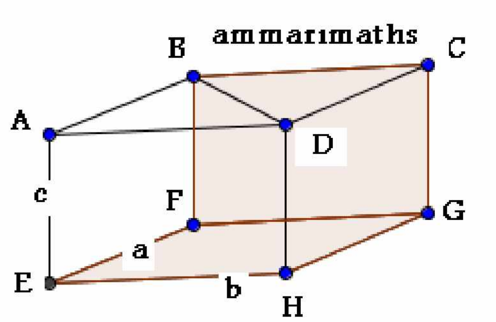
الحدوديات

I. الحد وديات أو الدوال الحدودية:

1) أمثلة وتعاريف:



نعتبر متوازي المستطيلات قائم كما في الشكل حيث أبعاده هي $l(x)$ و $L(x)$ و $h(x)$.

ليكن x عدد حقيقي نعتبر أن الأبعاد $l(x)$ و $L(x)$ و $h(x)$ تتغير تبعا لتغير العدد x بحيث:

$$h(x)=2x-3 \;\; ; \;\; L(x)=3x+2 \;\; ; \;\; l(x)=x-1$$

a) نلاحظ أن الأعداد $l(x) \; ; \; L(x) \; ; \; h(x)$ هي دوال على شكل $f(x)=ax+b$ نقول أن f حدودية من الدرجة الأولى.
ونذكر أن تمثيلها المبياني يكون على شكل مستقيم حيث b هو الأرتوب عند الأصل و a هو المعامل الموجه.

b) لتكن $S(x)$ هي مساحة قاعدة متوازي المستطيلات القائم و $V(x)$ هو حجمه ، لدينا إذن :

$$V(x)=S(x)=l(x)\times L(x) \quad ; \quad S(x)=l(x)\times L(x)$$

وهكذا نجد بعد إجراء الحساب أن:

$$\begin{cases} S(x)=(x-1)\times(3x+2)=3x^2-x-2 \\ V(x)=(3x^2-x-2)\times(2x-3)=6x^3-11x^2-x+6 \end{cases}$$

نلاحظ أن الأعداد $S(x)$ هي دالة على شكل $f(x)=ax^2+bx+c$ مع $a\neq 0$ ، نقول أن f حدودية من الدرجة الثانية.

ونلاحظ أن الأعداد $V(x)$ هي دالة على شكل $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ مع $a\neq 0$ ، نقول أن f حدودية من الدرجة الثالثة.

c) **أتمم الجدول التالي:**

Valeurs de x	2	3	...	...
$l(x)$	$l(2)=1$	$l(3)=....$	$l(...)=3$	$l(...)=....$
$L(x)$	$L(2)=8$	$L(3)=...$	$L(...)=...$	$L(...)=...$
$h(x)$	$h(2)=1$	$h(3)=...$	$h(...)=...$	$h(...)=4$
$S(x)$	$S(2)=8$	$S(3)=...$	$S(...)=...$	$S(...)=...$
$V(x)$	$V(2)=8$	$V(3)=...$	$V(...)=...$	$V(...)=...$

d) تعريف عام:

الحدودية (أو الدالة الحدودية) هي كل صيغة جبرية على شكل :

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+...+a_2X^2+a_1X+a_0$$

الأعداد : $a_n \; ; \; a_{n-1} \; ; \; a_{n-2} \; ; \; ... \; ; \; a_2 \; ; \; a_1 \; ; \; a_0$ تسمى معاملات الحدودية.

تكون الحدودية منعدمة إذا كانت جميع معاملاتها منعدمة وبالتالي فإن $P(X)=0$ مهما تكن قيمة المتغير X .

e) درجة حدودية غير منعدمة:

الحدودية (أو الدالة الحدودية) هي كل صيغة جبرية على شكل :

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+...+a_2X^2+a_1X+a_0 \quad \text{مع} \quad a_n\neq 0$$

العدد : a_n يسمى آخر معامل غير منعدم. في هذه الحالة نقول أن درجة الحدودية هي n ونكتب : $d^0P=n$

ملاحظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة لأنها لا تتوفر على آخر معامل غير منعدم.
الحد وديات الثابتة و غير المنعدمة درجتها 0 .

الحدوديات

2) تساوي حدوديتين :

تكون الحدوديتان غير المنعدمتان $P(X)$ و $Q(X)$ متساويتان إذا كانت لهما نفس الدرجة وكانت معملاتها متساوية على التوالي ، أي أن:

$$P(X) = Q(X)$$

يعني أن

$$a_n = b_n \text{ et } a_{n-1} = b_{n-1} \text{ et } \dots \text{ et } a_2 = b_2 \text{ et } a_1 = b_1 \text{ et } a_0 = b_0$$ و $$d^0P = d^0Q = n$$

3) عمليات حول الحدوديات :

نعتبر الحد وديات التالية بحيث:

$$Q(x) = 3x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

a) حدد درجة كل حدودية من الحدوديتين $P(x)$; $Q(x)$.

لدينا $d^0P = \dots$; $d^0Q = \dots$

b) أحسب $s(x) = Q(x) + P(x)$ و حدد درجة الحدودية $s(x)$. ماذا تلاحظ ؟

لدينا نلاحظ

$$s(x) = Q(x) + P(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$s(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

نلاحظ أن : $d^0(P+Q) \leq \sup(d^0P, d^0Q)$

c) أحسب $p(x) = Q(x) \times P(x)$ و حدد درجة الحدودية $p(x)$. ماذا تلاحظ ؟

لدينا نلاحظ

$$p(x) = Q(x) \times P(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

$$p(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

نلاحظ أن : $d^0(P \times Q) = d^0P \times d^0Q$

بصفة عامة: $P(X)$ و $Q(X)$ حدوديتان غير منعدمتان ، لدينا:

$$d^0(P \times Q) = d^0P \times d^0Q$$

$$d^0(P+Q) \leq \sup(d^0P, d^0Q)$$

d) القسمة الأقليدية :

نعتبر الحد وديات التالية بحيث:

$$B(x) = x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad A(x) = 7x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

$P(x) = 7x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$	$B(x) = x^2 + 2x - 3$
....	$Q(x) = \dots\dots\dots$
....	
....	
....	
....	
$R(x) = \dots\dots\dots$	

الحدوديات

لدينا $A(x)=B(x)\times Q(x)+R(x)$ مع $0\le d^0(R)\le d^0Q$

بصفة عامة: مهما تكن الحدوديتان $A(X)$ و $B(X)$ مع $B(X)\neq 0$ توجد حدوديتان $Q(x)$ et $R(x)$ بحيث:

$$A(x)=B(x)\times Q(x)+R(x) \quad \text{مع} \quad 0\le d^0(R)\le d^0B$$

4) جدر حدودية :

لتكن $P(X)$ حدودية بحيث $d^0P\ge 1$ ، العدد a هو جدر للحدودية يعني أن $P(a)=0$
أي أن a هو حل للمعادلة $P(x)=0$.

a) تمرين تطبيقي: (انظر التصحيح في دفتر التماؤين)

نعتبر الحدوديتان: **On considère les expressions algébriques suivantes:**

$$f(x)=(x-\frac{1}{3})^2-\frac{4}{9} \qquad ; \qquad g(x)=f(x)+(x^2-1)-3(x-1)$$

1) أحسب $f(\frac{1}{3})$ و $f(1)$ ، ثم استنتج $g(\frac{1}{3})$ و $g(1)$

2) أنشر $f(x)$ و $g(x)$ حدد درجة كل من الحدوديتن f و g .

3) عمل الحدودية $f(x)$ و استنتج تعميلا للحدودية $g(x)$

4) حل المعادلة $f(x)=0$ واستنتج جدور الحدودية $f(x)$

5) حدد جدور الحدودية $g(x)$

6) لاحظ بشير " ضيفنا الكريم" أن هناك علاقة تجسد الكلام التالي :
a عدد حقيقي و **h** دالة حدودية : " $h(a)=0$ يعني أن الحدودية $h(x)$ تقبل القسمة على $x-a$ "
وضح صحة هذا الكلام بثلاثة أمثلة من التمرين.

5) خاصية استكشافية :

لتكن $P(x)$ دالة حدودية و a عدد حقيقي :
الحدودية $P(x)$ تقبل القسمة على $x - a$ يعني أن $P(a)=0$

ما تحدث به بشير كان صحيحا سنحاول أن نبرهن على ذالك: حسب مبرهنة القسمة الأقليدية توجد حدوديتان $Q(x)$ et $R(x)$
بحيث: $P(x)=(x-a)\times Q(x)+R(x)$ **مع** $0\le d^0(R)$ ® $d^0(x-a)=1$ ، نستنتج أن $d^0(R)=0$
وبالتالي فإن الحدودية $R(x)$ ثابثة **نعوض x بالعدد a في العلاقة** $P(x)=(x-a)\times Q(x)+R(x)$ نجد:
$P(a)=(a-a)\times Q(a)+R(a)=R(a)$ **وبما أن الحدودية** $R(x)$ ثابثة فإن $R(x)=P(a)$
نستنتج أن: $P(x)=(x-a)\times Q(x)+P(a)$ **. نحن جاهزون لإتمام البرهنةز**

نفترض أن الحدودية $P(x)$ تقبل القسمة على $x - a$ ، **إذن** $P(x)=(x-a)\times Q(x)$ **وهذا يعني أن :** $P(a)=0$
نفترض أن $P(a)=0$ ، **إذن** $P(x)=(x-a)\times Q(x)+P(a)$ **وهذا يعني أن :** $P(a)=0$ **نعوض في العلاقة**
$P(x)=(x-a)\times Q(x)+P(a)$ نجد: $P(x)=(x-a)\times Q(x)$ **نستنتج أن: الحدودية** $P(x)$ تقبل القسمة على $x - a$.