

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x - 12 \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{4x - 12} \quad (2)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} \text{ ومنه } x = 3 \text{ يعني } 4x = 12 \text{ يعني } 4x - 12 = 0$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 - 1 \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1} \quad (3)$$

$$(2x-1)(2x+1) = 0 \text{ يعني } 4x^2 - 1 = 0$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} \text{ ومنه } x = -\frac{1}{2} \text{ أو } x = \frac{1}{2} \text{ يعني } 2x+1=0 \text{ أو } 2x-1=0$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 2x \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x} \quad (4)$$

$$x = 0 \text{ أو } x^2 - 2 = 0 \text{ يعني } x(x^2 - 2) = 0 \text{ يعني } x^3 - 2x = 0$$

$$x = 0 \text{ أو } x = -\sqrt{2} \text{ أو } x = \sqrt{2} \text{ يعني } x^2 = 2 \text{ أو } x^2 = 0$$

$$\text{ومنه } D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 5x - 3 \neq 0\} \text{ يعني } f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3} \quad (5)$$

$$\text{نحل المعادلة باستعمال المميز } 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$c = -3 \text{ و } b = -5 \text{ و } a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{ومنه: } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x + 6 \geq 0\} \text{ يعني } f(x) = \sqrt{-3x+6} \quad (6)$$

$$D_m = ]-\infty; 2] \text{ ومنه } x \leq 2 \text{ يعني } -3x \geq -6 \text{ يعني } -3x + 6 \geq 0$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \geq 0\} \text{ يعني } f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad (7)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0 \quad a = 1$$

بما أن  $\Delta > 0$  فان للحدودية جذرين هما:

$$x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$$

$x$	$-\infty$	$1/2$	$1$	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\text{ومنه: } D_f = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-3x+2}{x+1} \geq 0 \text{ و } x+1 \neq 0 \right\} \text{ يعني } f(x) = \sqrt{\frac{-3x+2}{x+1}} \quad (8)$$

$$x = -1 \text{ يعني } x+1 = 0 \text{ يعني } x = 3 \text{ يعني } -3x+2 = 0$$

**تمرين 1:** ليكن  $f$  الدالة العددية المعرفة كالتالي:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x^2 - 1$$

$$1. \text{ أحسب: } f(\sqrt{2}) \text{ و } f(-1) \text{ و } f(1)$$

$$2. \text{ حدد سوابق العدد } 2$$

$$\text{الجواب (1): } f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$3 \times x^2 = 3 \text{ يعني } 3 \times x^2 - 1 = 2 \text{ يعني } f(x) = 3 \times x^2 - 1 = 2$$

$$\text{يعني } x^2 = 1 \text{ يعني } x = 1 \text{ أو } x = -1 \text{ ومنه للعدد سابقين هما } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

**تمرين 2:** حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$$g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2) \quad f(x) = 3x^2 - x + 1 \quad (1)$$

$$m(x) = \sqrt{2x-4} \quad (4) \quad h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9} \quad (3)$$

**الجواب (1):**  $f(x) = 3x^2 - x + 1$  يعني  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 4 \neq 0\} \text{ يعني } g(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2)$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\} \text{ ومنه } x = 2 \text{ يعني } 2x = 4 \text{ يعني } 2x - 4 = 0$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \neq 0\} \text{ يعني } h(x) = \frac{5x+10}{x^2-9} \quad (3)$$

$$(x-3)(x+3) = 0 \text{ يعني } x^2 - 3^2 = 0 \text{ يعني } x^2 - 9 = 0$$

$$x = 3 \text{ أو } x = -3 \text{ يعني } x - 3 = 0 \text{ أو } x + 3 = 0$$

$$\text{ومنه } D_h = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$$

$$D_m = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 4 \geq 0\} \text{ يعني } m(x) = \sqrt{2x-4} \quad (4)$$

$$2x - 4 \geq 0 \text{ يعني } 2x \geq 4 \text{ يعني } x \geq 2$$

$$\text{ومنه } D_m = [2; +\infty[$$

**تمرين 3:** حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$  في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{4x - 12} \quad (2) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x} \quad (4) \quad f(x) = \frac{x+10}{4x^2-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{-3x+6} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3} \quad (5)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{-3x+2}{x-1}} \quad (8) \quad f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} \quad (7)$$

$$\text{الجواب (1): } f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10$$

يعني  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

$x$	$-\infty$	$-1$	$3/2$	$+\infty$	
$-2x^2+x+3$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$$D_f = \left[-1, \frac{3}{2}\right] \text{ ومنه}$$

$$f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1} \quad (3)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

$x^2 + 1 = 0$  يعني  $x^2 = -1$   
هذه المعادلة ليس لها حل في  $\mathbb{R}$

$$D_f = \mathbb{R} \text{ ومنه}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x} \quad (4)$$

$f(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $\sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$  و  $x \neq 0$

ونعلم أن:  $|x| \geq 0$  مهما تكن  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{اذن: } D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \quad (5)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 \text{ و } x-1 \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ و } x \neq 1\}$$

$$D_f = [-2, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}} \quad (6)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2+x+3 > 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1 ; x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$3/2$	$+\infty$	
$-2x^2+x+3$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$$D_f = \left[-1, \frac{3}{2}\right] \text{ ومنه}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2x+4} \quad (7)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \geq 0 \text{ و } 2x+4 \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ و } x \neq -2\}$$

$$D_f = [2, +\infty[$$

$$f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x} \quad (8)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 \text{ و } x \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ و } x \neq 0\}$$

$$D_f = ]-\infty, 0[$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1/3$	$+\infty$	
$-3x+2$	$+$	$ $	$+$	$0$	$-$
$x+1$	$+$	$0$	$-$	$ $	$-$
$-3x+2/x+1$	$-$	$  $	$+$	$0$	$-$

$$D_f = \left]-1, \frac{2}{3}\right]$$

**تمرين 4:** حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$$f(x) = \sqrt{-2x^2+x+3} \quad (2) \quad f(x) = \sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x} \quad (4) \quad f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}} \quad (6) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \quad (5)$$

$$f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2x+4} \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1} \quad (10) \quad f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|} \quad (9)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}} \quad (12)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}} \quad (1) \text{ **الأجوبة:**}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 \text{ و } x+1 \neq 0\right\}$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ يعني } -9x = -3$$

$$x+1=0 \text{ يعني } x=-1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$-9x+3$	$+$	$ $	$+$	$0$	$-$
$x+1$	$-$	$0$	$+$	$ $	$+$
$\frac{-9x+3}{x+1}$	$-$	$  $	$+$	$0$	$-$

$$D_f = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \text{ ومنه}$$

$$f(x) = \sqrt{-2x^2+x+3} \quad (2)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2+x+3 \geq 0\}$$

$$c=3 \quad b=1 \quad a=-2 \quad -2x^2+x+3=0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}} \quad (12)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6} \geq 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2\sqrt{6}$$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

$$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$14 + 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

لدينا  $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$  اذن :

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

$x$	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$	+	0	-	+

$$D_f = ]-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

**تمرين 5:** لتكن  $f$  و  $g$  الدالتين العدديتين المعرفتين بما

$$g(x) = |x| \text{ و } f(x) = \sqrt{x^2}$$

بين أن  $f = g$ .

**الجواب:** لدينا:  $D_f = \mathbb{R}$ , لأن  $x^2 \geq 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و  $D_g = \mathbb{R}$

ومنه فإن  $D_f = D_g$ .

وبما أن  $\sqrt{x^2} = |x|$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $f(x) = g(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

إذن  $f = g$ .

**تمرين 6:** لتكن  $f$  و  $g$  الدالتين العدديتين المعرفتين بما

$$g(x) = \frac{1+3x^2}{|x|} \text{ و } f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$$

هل الدالتين  $f$  و  $g$  متساويتين؟

**الجواب:** لدينا:  $f(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$  و  $x \neq 0$

لدينا  $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$  مهما تكن  $x \in \mathbb{R}$  لأن:  $x^2 \geq 0$

ومنه  $D_f = \mathbb{R}^*$

لدينا:  $g(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $|x| \neq 0$  و  $x \neq 0$

$|x| \neq 0$  يعني:  $x \neq 0$

ومنه  $D_g = \mathbb{R}^*$

اذن:  $D_g = \mathbb{R}^* = D_f$

ونعلم أن:  $\sqrt{x^2} = |x|$  و  $3x^2 + 1 = 1 + 3x^2$

$$f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|} \quad (9)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |2x-4| - |x-1| \neq 0\}$$

$|2x-4| = |x-1|$  يعني  $|2x-4| - |x-1| = 0$  يعني

يعني  $2x-4 = -(x-1)$  أو  $2x-4 = x-1$

يعني  $2x-4 = -x+1$  أو  $2x-x = 4-1$

يعني  $2x+x = 4+1$  أو  $x = 3$

يعني  $x = \frac{5}{3}$  أو  $x = 3$

ومنه:  $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}$

$$f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1} \quad (10)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 \cos x - 1 \neq 0\}$$

$\cos x = \frac{1}{2}$  يعني  $2 \cos x - 1 = 0$

يعني  $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

يعني  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  أو  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6}} \quad (11)$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6} \geq 0 \text{ و } x^2 - x - 6 \neq 0 \right\}$$

$$-2x^2 + 2x + 13$$

$$\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$$

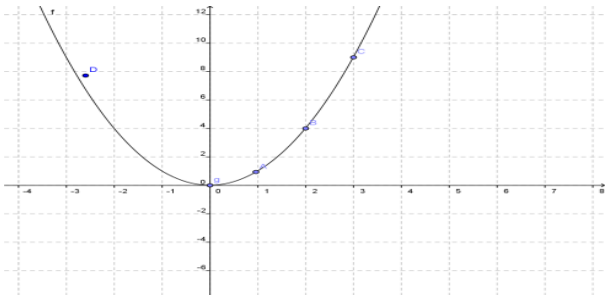
$$: x^2 - x - 6$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$$

$$x_2' = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ و } x_1' = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1-5}{2} = -2$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$	$-2$	$3$	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + 2x + 13$	-	0	+	+	+	0
$x^2 - x - 6$	+	+	0	-	0	+
$\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6}$	-	0	+	-	+	0

$$D_f = \left[ \frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2 \right] \cup \left[ 3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \right]$$



(4) محور الأرتاب محور تماثل المنحنى  $C_f$ .

**تمرين 10:** نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة

$$f(x) = \frac{2}{x} \text{ كالتالي:}$$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$
2. بين أن  $f$  دالة فردية
3. أرسم التمثيل المبياني للدالة  $f$
4. اعط تأويلا مبيانيا

**أجوبة: (1)**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

$$\text{ومنه: } D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

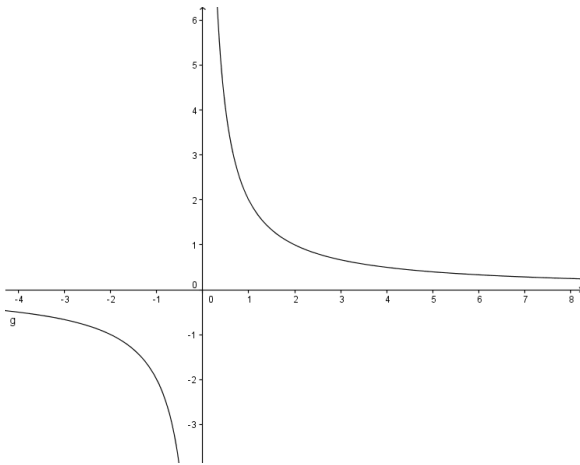
(2) أ) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  لدينا:  $-x$  تنتمي إلى  $\mathbb{R}^*$ .

$$\text{ب) } f(-x) = \frac{2}{(-x)} = -\frac{2}{x} = -f(x)$$

ومنه  $f$  دالة فردية

(3)

$x$	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$



(4) نقطة 0 مركز تماثل المنحنى  $C_f$ .

**تمرين 11:** أدرس رتابة الدوال المعرفة كالتالي:

$$f(x) = -3x + 2 \quad (2) \quad f(x) = 4x - 3 \quad (1)$$

**أجوبة: (1)**  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

ليكن  $x_1 \in \mathbb{R}$  و  $x_2 \in \mathbb{R}$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن:  $4x_1 < 4x_2$  اذن:  $4x_1 - 3 < 4x_2 - 3$  اذن:  $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تزايدية على  $\mathbb{R}$

ومنه  $f(x) = g(x)$  مهما تكن  $x \in \mathbb{R}^*$

وبالتالي  $f = g$ .

**تمرين 7:** لتكن  $h$  و  $t$  الدالتين العدديتين المعرفتين بما

$$t(x) = x - 1 \text{ و } h(x) = \frac{x^2 - x}{x}$$

هل الدالتين  $h$  و  $t$  متساويتين؟

**الجواب:** لدينا:  $h(x) \in \mathbb{R}$  يعني:  $x \neq 0$

$$\text{ومنه } D_h = \mathbb{R}^*$$

لدينا  $D_t = \mathbb{R}$  لأن  $t$  دالة حدودية

اذن وجدنا  $D_h \neq D_t$  ومنه  $h \neq t$

**تمرين 8:** نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{2x}{x+2}$$

وليكن  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  وليكن  $A$  و  $B$  نقط

أفصاليها هي  $-1$  و  $2$  على التوالي

(1) حدد أرتاب  $A$  و  $B$  علما أنهما ينتميان إلى  $(C_f)$ .

(2) لتكن  $E\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$ ,  $F(-3; 5)$ ,  $G(1; 0)$  نقط من المستوى. هل

النقط  $E$ ,  $F$ , و  $G$  تنتمي للمنحنى  $(C_f)$ ؟

**الجواب: (1)**  $A \in (C_f)$  يعني  $A(-1; f(-1))$

$$f(-1) = \frac{2 \times (-1)}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$B(2; 1) \in (C_f) \text{ يعني } B(2; f(2)) \quad f(2) = \frac{2 \times 2}{2+2} = 1$$

$$E\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right) \in (C_f) \text{؟ لدينا } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)+2} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$F(-3; 5) \notin (C_f) \text{ لدينا } f(-3) = \frac{2 \times (-3)}{(-3)+2} = \frac{-6}{-1} = 6 \neq 5$$

$$G(1; 0) \notin (C_f) \text{ لدينا } f(1) = \frac{2 \times 1}{1+2} = \frac{2}{3} \neq 0$$

**تمرين 9:** نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$

2. بين أن  $f$  دالة زوجية

3. أرسم التمثيل المبياني للدالة  $f$

4. اعط تأويلا مبيانيا

**أجوبة: (1)**  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

(2) أ) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $-x$  تنتمي إلى  $\mathbb{R}$ .

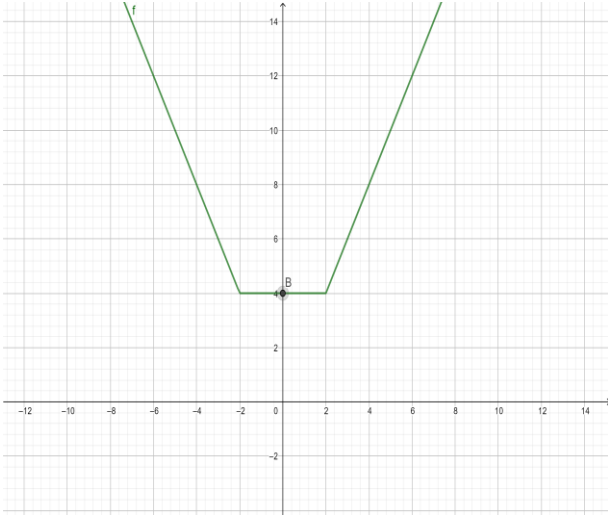
$$\text{ب) } f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 = \frac{1}{2}x^2 = f(x) \text{ ومنه } f \text{ دالة زوجية}$$

(3)

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

و إذا كانت  $f(x) = 4$  إذا كانت  $x \in [-2, 2]$   
و إذا كانت  $f(x) = 2x$  إذا كانت  $x \in [2, +\infty[$

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$0$	$+$
$ x-2 $	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	
$x+2$	$-$	$0$	$+$	$+$
$ x+2 $	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	
$ x-2 + x+2 $	$-2x$	$4$	$2x$	



**تمرين 14:** التمثيل التالي يمثل التمثيل المبياني لدالة  $f$

على المجال  $[-6; 7]$

أجب عن الأسئلة التالية باستعمال المبيان فقط

(1) ماهي صور الأعداد الحقيقية التالية: -5 و -3 و 0 و 6 ؟

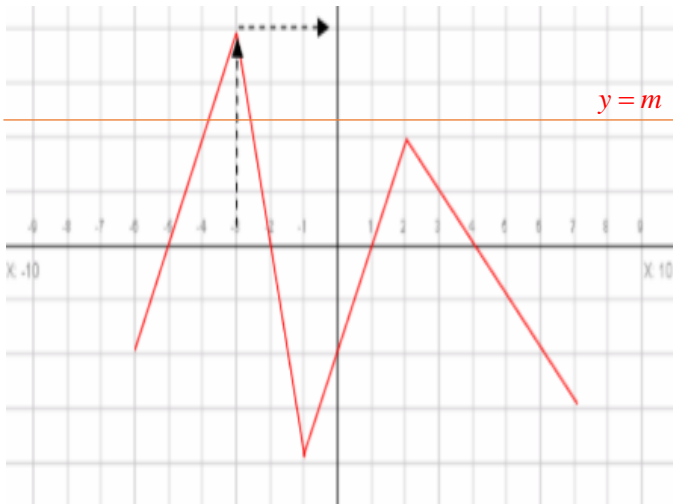
(2) حدد سوابق الأعداد الحقيقية التالية: -1 و 0 ؟

(3) حل مبيانيا المعادلة  $f(x) = 0$

(4) ناقش حسب قيم البارامتر  $m$  عدد حلول المعادلة  $f(x) = m$

(5) حل مبيانيا المتراجحة  $f(x) < 0$

(6) حل مبيانيا المتراجحة  $f(x) \geq 2$



**أجوبة:** (1) صورة -5 هو 0 و صورة -3 هو 4

و صورة 0 هو -2 و صورة 6 هو -2

(2) سوابق العدد -1 هم -5,5 و -1,75 و 0,5 و 5

(2)  $f(x) = -3x + 2$

$D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

ليكن:  $x_1 \in \mathbb{R}$  و  $x_2 \in \mathbb{R}$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن:  $-3x_1 > -3x_2$  اذن:  $4x_1 + 2 > 4x_2 + 2$  اذن:  $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تناقصية على  $\mathbb{R}$

**تمرين 12:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = |2x+3|$

أرسم التمثيل المبياني للدالة  $f$

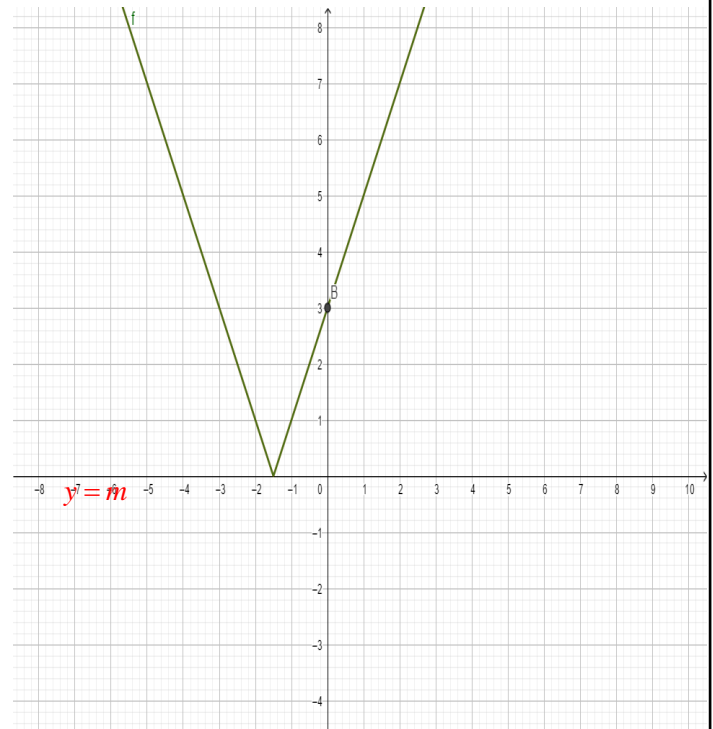
**الجواب:** لدينا  $f(x) \in \mathbb{R}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ومنه  $D_f = \mathbb{R}$

$2x+3=0$  يعني  $x = -\frac{3}{2}$

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	$0$	$+$
$ 2x+3 $	$-2x-3$	$2x+3$	

**اذن:**  $f(x) = -2x-3$  إذا كانت  $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$

و  $f(x) = 2x+3$  إذا كانت  $x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$



**تمرين 13:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = |x-2| + |x+2|$

أرسم التمثيل المبياني للدالة  $f$

**الجواب:** لدينا  $f(x) \in \mathbb{R}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ومنه  $D_f = \mathbb{R}$

$x+2=0$  يعني  $x = -2$

$x-2=0$  يعني  $x = 2$

**اذن:**  $f(x) = -2x$  إذا كانت  $x \in \left]-\infty, -2\right]$

لأنها دالة حدودية  $D_h = \mathbb{R}$   $h(x) = 2x^3 + x^2$  (3)

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}$   
(ب)

$$h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$$

$$h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$$

ومنه  $h$  ليست زوجية ولا فردية

$$t(x) = \frac{x}{x-2} \quad (4) \quad t(x) \in \mathbb{R} \text{ يعني } x-2 \neq 0 \text{ يعني } x \neq 2$$

$$D_t = \mathbb{R} - \{2\}$$

لدينا  $-2 \in D_t$  ولكن  $2 \notin D_t$   $-(-2) = 2$

ومنه  $D_t$  غير متماثل بالنسبة ل  $O$

ومنه  $t$  ليست زوجية ولا فردية

$$m(x) = \sqrt{x-1} \quad (5)$$

$$m(x) \in \mathbb{R} \text{ يعني } x-1 \geq 0 \text{ يعني } x \geq 1$$

$$D_m = [1; +\infty[$$

لدينا  $2 \in D_m$  ولكن  $-2 \notin D_m$

ومنه  $D_m$  غير متماثل بالنسبة ل  $O$

ومنه  $m$  ليست زوجية ولا فردية

**تمرين 16:** أدرس زوجية الدوال المعرفة كالتالي :

$$(1) \text{ أجوبة: (1) } f(x) = \frac{x^2-1}{x} \quad (2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$(3) f(x) = \frac{|x|}{x^2-1} \quad (4) f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (5) f(x) = \frac{2x^3}{x^2+5}$$

$$(6) f(x) = |x| - \sqrt{2x^2+4} \quad (7) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$(1) \text{ أجوبة: } f(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

$f(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $x \neq 0$  ان  $D_f = \mathbb{R}^*$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}^*$   
(ب)

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{-x} = -\frac{x^2-1}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

ومنه  $f$  دالة فردية

$$(2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R}^* \text{ ان } x \neq 0 \text{ يعني } f(x) \in \mathbb{R}$$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}^*$   
(ب)

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{-x} = x^2 - \frac{1}{x} = \left(-x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

ومنه  $f$  دالة ليست فردية ولا زوجية

$$(3) f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$$

سوابق العدد 0 هم -5 و -2 و 1 و 4

(3) الحل مبيانيا المعادلة  $f(x) = 0$

حلول المعادلة هم سوابق العدد 0 ومنه  $S = \{-5; -2; 1; 4\}$

(4) نناقش حسب قيم البارامتر  $m$  عدد حلول المعادلة  $f(x) = m$   
عدد حلول المعادلة  $f(x) = m$  هم أفاصيل نقط تقاطع منحنى الدالة

$f$  و المستقيم الذي معادلته  $y = m$

إذا كانت:  $m < -4$  ليس هناك حل للمعادلة

إذا كانت:  $m = -4$  للمعادلة حل وحيد

إذا كانت:  $-3 < m < -4$  للمعادلة حلين

إذا كانت:  $-2 < m < -3$  للمعادلة ثلاث حلول

إذا كانت:  $m = 2$  للمعادلة ثلاث حلول

إذا كانت:  $2 < m < 4$  للمعادلة حلين

إذا كانت:  $m = 4$  للمعادلة حل وحيد

إذا كانت:  $m > 4$  ليس هناك حل للمعادلة

(5) نحل مبيانيا المتراحة  $f(x) < 0$

حلول المتراحة هي أفاصيل النقط بحيث منحنى الدالة  $C_f$  يوجد

تحت المستقيم  $y = 0$  أي تحت محور الأفاصيل أي :

$$S = [-6; 7] \cup ]-2; 1[ \cup ]4; 7]$$

(6) نحل مبيانيا المتراحة  $f(x) \geq 2$

حلول المتراحة هي أفاصيل النقط بحيث منحنى الدالة  $C_f$  يوجد

فوق المستقيم  $y = 2$  أي  $S = [-4; 2.5] \cup \{2\}$

**تمرين 15:** أدرس زوجية الدوال المعرفة كالتالي :

$$(1) f(x) = 3x^2 - 5 \quad (2) g(x) = \frac{3}{x} \quad (3)$$

$$h(x) = 2x^3 + x^2$$

$$(4) t(x) = \frac{x}{x-2} \quad (5) m(x) = \sqrt{x-1}$$

$$(1) \text{ أجوبة: } f(x) = 3x^2 - 5$$

$D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}$

(ب)

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$$

$$f(-x) = f(x)$$

ومنه  $f$  دالة زوجية

$$(2) g(x) = \frac{3}{x} \quad g(x) \in \mathbb{R} \text{ يعني } x \neq 0$$

$$D_g = \mathbb{R}^*$$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}^*$

(ب)

$$g(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x}$$

$$g(-x) = -g(x)$$

ومنه  $g$  دالة فردية

**تمرين 17:** أدرس زوجية الدوال المعرفة كالتالي :

$$g(x) = |3x-1| - |3x+1| \quad (2) \quad f(x) = |x-2| + |x+2| \quad (1)$$

$$h(x) = \frac{x^3}{|x|-2} \quad (3)$$

**أجوبة: (1)**

لدينا  $f(x) \in \mathbb{R}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ومنه  $D_f = \mathbb{R}$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}$

(ب)

$$f(-x) = |-x-2| + |-x+2| = |-(x+2)| + |-(x-2)|$$

ونعلم أن:  $|-x| = |x|$  إذن:

$$f(-x) = |x+2| + |x-2| = |x-2| + |x+2|$$

إذن:  $f(-x) = f(x)$

وبالتالي:  $f$  دالة زوجية

$$g(x) = |3x-1| - |3x+1| \quad (2)$$

لدينا  $g(x) \in \mathbb{R}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ومنه  $D_g = \mathbb{R}$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}$

(ب)

$$g(-x) = |-3x-1| - |-3x+1| = |-(3x+1)| - |-(3x-1)|$$

ونعلم أن:  $|-x| = |x|$  إذن:

$$g(-x) = |3x+1| - |3x-1| = -(|3x-1| - |3x+1|)$$

إذن:  $g(-x) = -g(x)$

وبالتالي:  $g$  دالة فردية

$$h(x) = \frac{x^3}{|x|-2} \quad (3)$$

$h(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $|x|-2 \neq 0$

$$|x|-2=0 \text{ يعني } |x|=2 \text{ يعني } x=2 \text{ أو } x=-2$$

ومنه  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

(ب)

$$|-x| = |x| \text{ لأن } h(-x) = \frac{(-x)^3}{|-x|-2} = -\frac{x^3}{|x|-2}$$

إذن:  $h(-x) = -h(x)$  وبالتالي:  $h$  دالة فردية

**تمرين 18:** لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كالتالي:

$$5f(x) + f(-x) = 4x^3 + 8x \quad \mathbb{R} \text{ لكل } x$$

(1) بين أن  $f$  دالة فردية

(2) حدد  $f(x)$

**أجوبة: (1)**

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}$

(ب) لدينا  $5f(x) + f(-x) = 4x^3 + 8x$  (1) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

إذن بتعويض  $x$  ب  $-x$  نجد:

$$(2) \quad 5f(-x) + f(x) = -4x^3 - 8x$$

نجمع المتساويتين طرف لطرف فنجد:

$f(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 - 1 = 0$  يعني  $x^2 = 1$  يعني  $x = 1$  أو  $x = -1$

إذن  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  فان:  $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

(ب)

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

ومنه  $f$  دالة زوجية

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 \geq 0\} \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (4)$$

$1 - x^2 = 0$  يعني  $x^2 = 1$  يعني  $x = 1$  أو  $x = -1$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$1-x^2$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

ومنه  $D_f = [-1; 1]$

(أ) لكل  $x \in [-1; 1]$  فان:  $-x \in [-1; 1]$

$$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \quad (ب)$$

$$f(-x) = f(x)$$

وبالتالي:  $f$  دالة زوجية

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5 \neq 0\} \quad f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5} \quad (5)$$

$x^2 + 5 = 0$  يعني  $x^2 = -5$  وهذه المعادلة ليس لها حل في  $\mathbb{R}$

ومنه:  $D_f = \mathbb{R}$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}$

(ب)

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 + 5} = \frac{-2x^3}{x^2 + 5}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

ومنه  $f$  دالة فردية

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4 \geq 0\} \quad f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4} \quad (6)$$

نعلم أن:  $2x^2 \geq 0$  مهما تكن  $x \in \mathbb{R}$

إذن:  $2x^2 + 4 \geq 0 + 4$

إذن:  $2x^2 + 4 \geq 4 \geq 0$

ومنه:  $D_f = \mathbb{R}$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}$

(ب)

$$f(-x) = |-x| - \sqrt{2(-x)^2 + 4} = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$$

$$f(-x) = f(x)$$

ومنه  $f$  دالة زوجية

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (7)$$

إذن:  $D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$

لدينا  $2 \in \mathbb{R}^+$  ولكن  $-2 \notin \mathbb{R}^+$

ومنه  $f$  دالة ليست فردية ولا زوجية

**أجوبة: (1)**  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

(2) أ) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $-x$  تنتمي إلى  $\mathbb{R}$ .

ب)  $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 = \frac{3}{2}x^2 = f(x)$

ومنه  $f$  دالة زوجية

(3) أ) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$ :

ليكن:  $x_1 \in [0; +\infty[$  و  $x_2 \in [0; +\infty[$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن:  $x_1^2 < x_2^2$  ومنه  $\frac{3}{2}x_1^2 < \frac{3}{2}x_2^2$  أي  $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تزايدية على  $[0; +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0]$ :

ليكن:  $x_1 \in ]-\infty; 0]$  و  $x_2 \in ]-\infty; 0]$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن:  $x_1^2 > x_2^2$  ومنه  $\frac{3}{2}x_1^2 > \frac{3}{2}x_2^2$  أي  $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تناقصية على  $]-\infty; 0]$

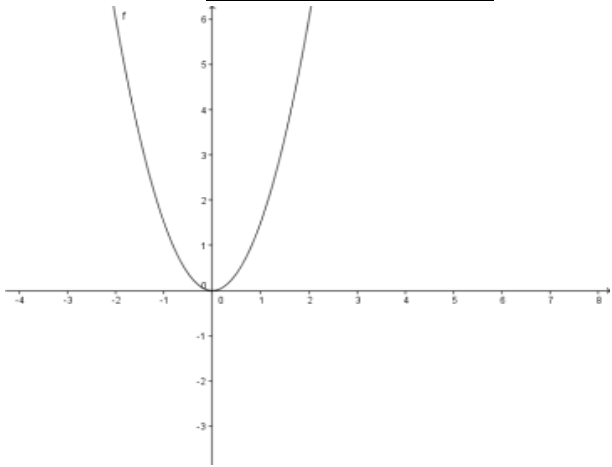
(4) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$		$0$	

(5) الدالة  $f$  تقبل قيمة دنيا عند  $x = 0$

(6) رسم التمثيل المبياني للدالة  $f$

$x$	$0$	$1$	$2$	$3$
$f(x)$	$0$	$\frac{3}{2}$	$6$	$\frac{27}{2}$



**تمرين 21:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

(1) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(2) أدرس زوجية الدالة  $f$

(3) أدرس رتبة الدالة  $f$  على كل من المجالين  $[0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0]$

وحدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(4) هل الدالة  $f$  تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

(5) أرسم  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

**أجوبة: (1)**  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

(2) أ) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $-x$  تنتمي إلى  $\mathbb{R}$ .

ب)  $f(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^2 = -\frac{1}{4}x^2 = f(x)$  ومنه  $f$  دالة زوجية

(3) أ) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$ :

$5f(x) + f(-x) + 5f(-x) + f(x) = 4x^3 + 8x - 4x^3 - 8x$

اذن:  $6f(x) + 6f(-x) = 0$

اذن:  $6(f(x) + f(-x)) = 0$

اذن:  $f(x) + f(-x) = 0$

اذن:  $f(-x) = -f(x)$

وبالتالي:  $f$  دالة فردية

(2) نحدد  $f(x)$

بما أن  $f$  دالة فردية فان:  $f(-x) = -f(x)$

ونعلم أن:  $5f(x) + f(-x) = 4x^3 + 8x$

اذن:  $5f(x) - f(x) = 4x^3 + 8x$

اذن:  $4f(x) = 4x^3 + 8x$

اذن:  $f(x) = \frac{4x^3 + 8x}{4}$

اذن:  $f(x) = x^3 + 2x$

**تمرين 19:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = \frac{2}{x+1}$

(1) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(2) أدرس رتبة الدالة  $f$  على كل من المجالين  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; -1[$ .

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

**أجوبة: (1)**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\}$

$x+1=0$  يعني  $x=-1$  ومنه:  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

(2) أ) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$ :

ليكن:  $x_1 \in ]-1; +\infty[$  و  $x_2 \in ]-1; +\infty[$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن  $x_1+1 < x_2+1$  ومنه  $\frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$  ومنه  $\frac{2}{x_1+1} > \frac{2}{x_2+1}$

أي  $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تناقصية على  $]-1; +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; -1[$

ليكن:  $x_1 \in ]-\infty; -1[$  و  $x_2 \in ]-\infty; -1[$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن  $x_1+1 < x_2+1$  ومنه  $\frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$  ومنه  $\frac{2}{x_1+1} > \frac{2}{x_2+1}$

أي  $f(x_1) > f(x_2)$  ومنه الدالة  $f$  تناقصية على  $]-\infty; -1[$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$			

**تمرين 20:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = \frac{3}{2}x^2$

1. حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. أدرس زوجية الدالة  $f$

3. أدرس رتبة الدالة  $f$  على كل من المجالين  $[0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0]$

4. حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

5. هل الدالة  $f$  تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

6. أرسم  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم م  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .



3. أدرس رتبة الدالة  $f$  على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

4. حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

5. هل الدالة  $f$  تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

6. أرسم  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم

**أجوبة: (1)**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

ومنه:  $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

(2) أ) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  لدينا:  $-x$  تنتمي إلى  $\mathbb{R}^*$ .

ب)  $f(-x) = \frac{-2}{-x} = -\frac{2}{x} = -f(x)$  ومنه  $f$  دالة فردية

(3) أ) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ :

ليكن:  $x_1 \in ]0; +\infty[$  و  $x_2 \in ]0; +\infty[$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن:  $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$  ومنه  $\frac{-2}{x_1} < \frac{-2}{x_2}$  أي  $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تزايدية على  $]0; +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0[$

ليكن:  $x_1 \in ]-\infty; 0[$  و  $x_2 \in ]-\infty; 0[$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن:  $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$  ومنه  $\frac{-2}{x_1} < \frac{-2}{x_2}$  أي  $f(x_1) < f(x_2)$

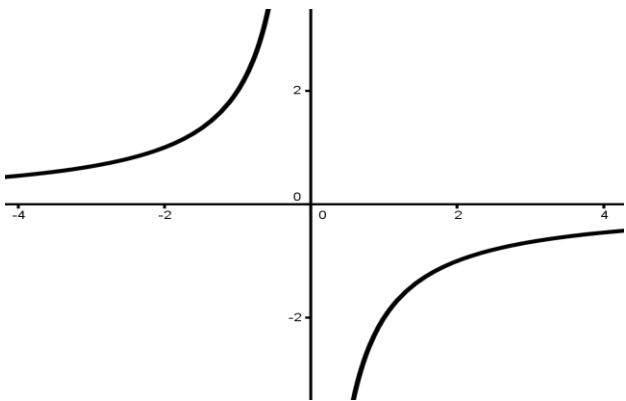
ومنه الدالة  $f$  تزايدية على  $]-\infty; 0[$

(4)

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$			

(5) الدالة  $f$  تقبل لا تقبل لا قيمة قصوى ولا قيمة دنيا

(6) التمثيل المبياني للدالة  $f$  هو هذلول مركزه النقطة  $O$



**تمرين 24:** حدد جدول تغيرات الدالة في الحالات التالية:

(1)  $f(x) = \frac{3}{x}$  (2)  $f(x) = \frac{-4}{x}$

**أجوبة: (1)**  $f(x) = \frac{-4}{x}$  اذن  $a = -4 < 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$			

(2)  $f(x) = \frac{3}{x}$  اذن  $a = 3 > 0$

ليكن:  $x_1 \in ]0; +\infty[$  و  $x_2 \in ]0; +\infty[$  بحيث  $x_1 < x_2$

اذن:  $x_1^2 < x_2^2$  ومنه  $-\frac{1}{4}x_1^2 > -\frac{1}{4}x_2^2$  أي  $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تناقصية على  $]0; +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0[$ :

ليكن:  $x_1 \in ]-\infty; 0[$  و  $x_2 \in ]-\infty; 0[$  بحيث  $x_1 < x_2$

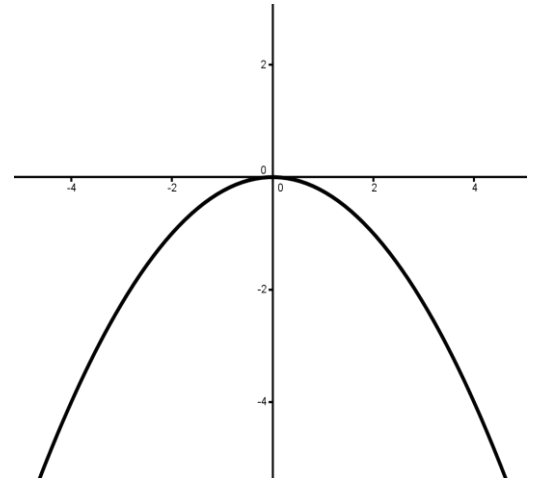
اذن:  $x_1^2 > x_2^2$  ومنه  $-\frac{1}{4}x_1^2 < -\frac{1}{4}x_2^2$  أي  $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة  $f$  تزايدية على  $]-\infty; 0[$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$			

(4) الدالة  $f$  تقبل قيمة قصوى عند  $x = 0$

(5) التمثيل المبياني للدالة  $f$  هو شلجم رأسه النقطة  $O$



**تمرين 22:** حدد جدول تغيرات الدالة في الحالات التالية:

(1)  $f(x) = -3x^2$  (2)  $f(x) = 5x^2$  (3)  $f(x) = \frac{7}{2}x^2$

**أجوبة: (1)**  $f(x) = -3x^2$  اذن  $a = -3 < 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$			

(2)  $f(x) = 5x^2$  اذن  $a = 5 > 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$			

(3)  $f(x) = \frac{7}{2}x^2$  اذن  $a = \frac{7}{2} > 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$			

**تمرين 23:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = \frac{-2}{x}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. أدرس زوجية الدالة  $f$

(ب) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; 0]$

ليكن  $x_2 \in ]-\infty; 0]$  و  $x_1 \in ]-\infty; 0]$   
اذن  $x_1 + x_2 \leq 0$  و  $x_2 \leq 0$  و  $x_1 \leq 0$

اذن  $3(x_1 + x_2) \leq 0$  لأن  $3 > 0$

ومنه :  $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

وبالتالي :  $f$  تناقصية على المجال  $]-\infty; 0]$

حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$$f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$		↘ 2 ↗	

**تمرين 27:** لتكن  $g$  دالة معرفة ب:  $g(x) = \frac{x}{x+1}$

(1) حدد  $D_g$

(2) ليكن  $x_1 \in D_g$  و  $x_2 \in D_g$  بحيث  $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

(معدل تغير الدالة  $g$ )

(3) أدرس رتبة الدالة  $g$  على كل من المجالين  $]-\infty; -1[$

و  $] -1; +\infty[$  و حدد جدول تغيرات الدالة  $g$ .

**أجوبة:** (1)  $g(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $x+1 \neq 0$  يعني  $x \neq -1$

ومنه :  $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

(2) ليكن  $x_1 \in D_g$  و  $x_2 \in D_g$  بحيث  $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1 + 1} - \frac{x_2}{x_2 + 1} = \frac{x_1(x_2 + 1) - x_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

(3) أ) دراسة رتبة الدالة  $g$  على كل من المجالين  $]-\infty; -1[$

ليكن  $x_1 \in ]-\infty; -1[$  و  $x_2 \in ]-\infty; -1[$  و  $x_1 \neq x_2$

اذن  $x_1 < -1$  و  $x_2 < -1$  اذن  $x_1 + 1 < 0$  و  $x_2 + 1 < 0$

اذن  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

ومنه :  $T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} > 0$  على  $]-\infty; -1[$

وبالتالي :  $g$  تزايدية قطعاً على المجال  $]-\infty; -1[$

(ب) دراسة رتبة الدالة  $g$  على كل من المجالين  $]-1; +\infty[$

ليكن  $x_1 \in ]-1; +\infty[$  و  $x_2 \in ]-1; +\infty[$  و  $x_1 \neq x_2$

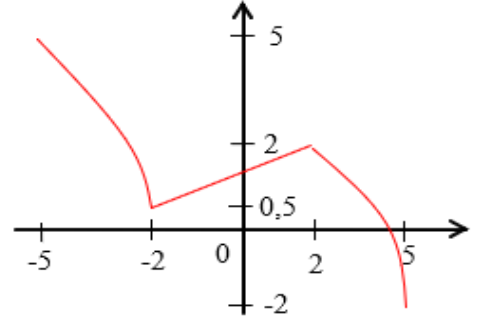
اذن  $x_1 > -1$  و  $x_2 > -1$  اذن  $x_1 + 1 > 0$  و  $x_2 + 1 > 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$		↘ ↗	

**تمرين 25:** التمثيل التالي يمثل التمثيل المبياني لدالة  $f$

على المجال  $[-5; 5]$

حدد جدول تغيرات الدالة



**الجواب:**

$x$	$-5$	$-2$	$2$	$5$
$f(x)$	5	↘ 0,5 ↗	2	↘ -2

**تمرين 26:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = 3x^2 + 2$

(1) حدد  $D_f$

(2) ليكن  $x_1 \in D_f$  و  $x_2 \in D_f$  بحيث  $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

(معدل تغير الدالة  $f$ )

(3) أدرس رتبة الدالة  $f$  على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0]$

و حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

**أجوبة:** (1)

$D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2} = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

اذن :  $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2)$

(3) أ) دراسة رتبة الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$

ليكن  $x_1 \in ]0; +\infty[$  و  $x_2 \in ]0; +\infty[$

اذن :  $x_1 \geq 0$  و  $x_2 \geq 0$  اذن  $x_1 + x_2 \geq 0$

اذن  $3(x_1 + x_2) \geq 0$  لأن  $3 > 0$

ومنه :  $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

وبالتالي :  $f$  تزايدية على المجال  $]0; +\infty[$

اذن:  $0 < x_1 \leq 1$  و  $0 < x_2 \leq 1$  اذن  $0 < x_1 x_2 \leq 1$

و  $x_1 \neq x_2$

اذن  $0 < x_1 x_2 - 1 < 0$  ولدينا  $0 < x_1 x_2$

ومنه:  $0 < T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$  على  $I = ]0; 1]$

وبالتالي:  $f$  تناقصية قطعاً على المجال  $I = ]0; 1]$

(ب) دراسة رتابة الدالة  $f$  على المجال  $J = [1; +\infty[$

ليكن  $x_1 \in [1; +\infty[$  و  $x_2 \in [1; +\infty[$  و  $x_1 \neq x_2$

اذن:  $x_1 \geq 1$  و  $x_2 \geq 1$  اذن  $x_1 x_2 > 1$  و  $x_1 x_2 \neq x_1$

ولدينا  $0 < x_1 x_2 - 1 > 0$

ومنه:  $0 < T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$  على  $J = [1; +\infty[$

وبالتالي:  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $J = [1; +\infty[$

(4) استنتاج رتابة الدالة  $f$  على كل من المجالين  $I' = [-1; 0[$

و  $J' = ]-\infty; -1]$

نعلم أن  $f$  دالة فردية

- بما أن  $f$  تناقصية قطعاً على المجال  $I = ]0; 1]$  فإن  $f$  أيضاً

تناقصية قطعاً على مماثل المجال  $I = ]0; 1]$  بالنسبة ل  $O$

الذي هو  $I' = [-1; 0[$

- بما أن  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $J = [1; +\infty[$  فإن  $f$  أيضاً

تزايدية قطعاً على مماثل المجال  $J = [1; +\infty[$  بالنسبة ل  $O$

الذي هو  $J' = ]-\infty; -1]$

(5) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .  $f(x) = 1 + \frac{1}{x} = 2$

و  $f(-1) = -1 - \frac{1}{1} = -2$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
Variations de $f(x)$		$-2$		$2$	

**تمرين 29:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = 5x^2 + 3$

بين أن الدالة  $f$  تقبل قيمة دنيا وحدد القيمة الدنيا للدالة  $f$

**الجواب:**  $f(x) = 5x^2 + 3$  و  $D_f = \mathbb{R}$

نعلم أن:  $x^2 \geq 0$  لكل  $x \in \mathbb{R}$

اذن  $5x^2 \geq 0$  لأن  $5 > 0$

ومنه:  $5x^2 + 3 \geq 3$  ولدينا  $f(0) = 3$

ومنه:  $f(x) \geq f(0)$  لكل  $x \in \mathbb{R}$

وبالتالي  $f(0) = 3$  هي القيمة الدنيا للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

**تمرين 30:** لتكن  $g$  دالة معرفة ب:  $g(x) = -4x^2 + 1$

بين أن الدالة  $g$  تقبل قيمة قصوى وحدد القيمة القصوى للدالة  $g$

اذن  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

ومنه:  $0 < T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$  على  $J = ]-1; +\infty[$

وبالتالي:  $g$  تزايدية قطعاً على المجال  $J = ]-1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$			

**تمرين 28:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(1) حدد  $D_f$

(2) أدرس زوجية الدالة  $f$

(3) ليكن  $x_1 \in D_f$  و  $x_2 \in D_f$  بحيث  $x_1 \neq x_2$

بين أن:  $T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$

(معدل تغير الدالة  $f$ )

(3) أدرس رتابة الدالة  $f$  على كل من المجالين  $I = ]0; 1]$

و  $J = [1; +\infty[$

(4) استنتاج رتابة الدالة  $f$  على كل من المجالين  $I' = [-1; 0[$

و  $J' = ]-\infty; -1]$

(5) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

**أجوبة:** (1)  $f(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $x \neq 0$  اذن  $D_f = \mathbb{R}^*$

(2) دراسة زوجية الدالة  $f$

(أ) لكل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا:  $-x \in \mathbb{R}^*$

(ب)

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

ومنه  $f$  دالة فردية

(3)

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2}$$

$$= \frac{x_1^2 \times x_2 + x_2 - x_2^2 \times x_1 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 \times x_2 (x_1 - x_2) + x_2 - x_1}{x_1 \times x_2}$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$$

(3) أ) دراسة رتابة الدالة  $f$  على المجال  $I = ]0; 1]$

ليكن  $x_1 \in ]0; 1]$  و  $x_2 \in ]0; 1]$  و  $x_1 \neq x_2$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$		$0$	

ب) جدول تغيرات الدالة:  $f$

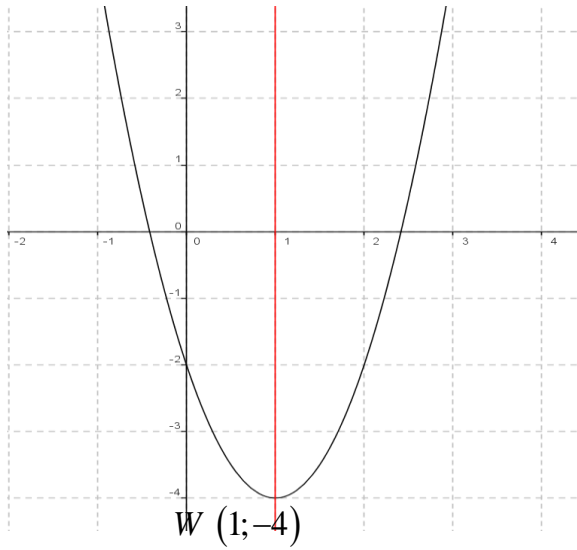
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$W(1; -4) \quad (f(1) = 2 - 4 - 2 = -4)$$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f(x)$		$-4$	

في المعلم  $f(0; \bar{i}; \bar{j})$  التمثيل المبياني للدالة هو شلجم رأسه

$W(1; -4)$  ومحوره هو المستقيم  $x = 1$



**تمرين 33:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ .

(1) حدد  $D_f$

(2) بين أن:  $f(x) = -2(x-1)^2 + 1$

(3) (يسمى الشكل القانوني  $(f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta)$ )

(4) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(5) حدد نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور

الأفصيل ومع محور الأرتيب.

(6) أرسم  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$

**أجوبة: (1)**  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 1 = -2(x^2 - 2x) - 1 = -2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 1 = -2(x-1)^2 + 1$$

$$f(x) = -2((x-1)^2 - 1) - 1 = -2(x-1)^2 + 2 - 1 = -2(x-1)^2 + 1$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:  $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$

نجد:  $\alpha = -1; \beta = 1; a = -2$

(4) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ . لدينا:  $a < 0$  ان:  $(2 > 0)$

**الجواب:**  $D_g = \mathbb{R}$  و  $g(x) = -4x^2 + 1$

نعلم أن:  $x^2 \geq 0$  لكل  $x \in \mathbb{R}$

اذن  $-4x^2 \leq 0$  لأن:  $-4 < 0$

ومنه:  $-4x^2 + 1 \leq 1$  ولدينا  $g(0) = 1$

ومنه:  $g(x) \leq g(0)$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  وبالتالي  $g(0) = 1$  هي

القيمة القصوى للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$

**تمرين 31:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

(1) بين أن:  $f(x) = 6 - (2x-1)^2$  لكل  $x \in \mathbb{R}$

(2) بين أن:  $f(x) \leq 6$  لكل  $x \in \mathbb{R}$  و أحسب  $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(3) استنتج مطاريف الدالة  $f$

**أجوبة: (1)** لدينا  $D_f = \mathbb{R}$

$$\text{لدينا } 6 - (2x-1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1)$$

$$= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$$

اذن:  $f(x) = 6 - (2x-1)^2$  لكل  $x \in \mathbb{R}$

(3) نعلم أن:  $(2x-1)^2 \geq 0$  اذن:  $-(2x-1)^2 \leq 0$

اذن:  $6 - (2x-1)^2 \leq 6$  اذن:  $f(x) \leq 6$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1-1)^2 = 6$$

(3) استنتج مطاريف الدالة  $f$

وجدنا  $6 - (2x-1)^2 \leq 6$  و  $f(x) \leq 6$

اذن:  $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$  لكل  $x \in \mathbb{R}$

وبالتالي  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$  هي القيمة القصوى للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

**تمرين 32:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$

(1) حدد  $D_f$

(2) بين أن:  $f(x) = 2(x-1)^2 - 4$

(يسمى الشكل القانوني  $(f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta)$ )

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$  باستعمال طريقة تغيير المعلم و

ارسم التمثيل المبياني للدالة  $f$

**أجوبة: (1)**  $D_f = \mathbb{R}$

(2) بين أن:

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 2 = 2(x^2 - 2x) - 2$$

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 2 = 2(x^2 - 2x + 1) - 2 - 2$$

$$f(x) = 2(x-1)^2 - 4$$

$$y = 2(x-1)^2 - 4 \text{ يعني } f(x) = 2(x-1)^2 - 4 \quad (3)$$

$$\text{يعني } y + 4 = 2(x-1)^2$$

$$\text{نضع } \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 4 \end{cases} \text{ اذن: } \begin{cases} x - 1 = X \\ y + 4 = Y \end{cases}$$

$$\text{اذن: } Y = 2X^2$$

(أ) جدول تغيرات الدالة:  $2X^2 \rightarrow X (2 > 0)$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f(x)$		$-1$	

(3) أ) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأفصيل

نحل فقط المعادلة:  $f(x) = 0$  يعني  $(x+2)^2 - 1 = 0$

يعني  $(x+2)^2 = 1$  يعني  $x+2 = 1$  أو  $x+2 = -1$

يعني  $x = -1$  أو  $x = -3$

ومنه نقط التقاطع هما:  $A(-3;0)$  و  $B(-1;0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

ب) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأرتيب

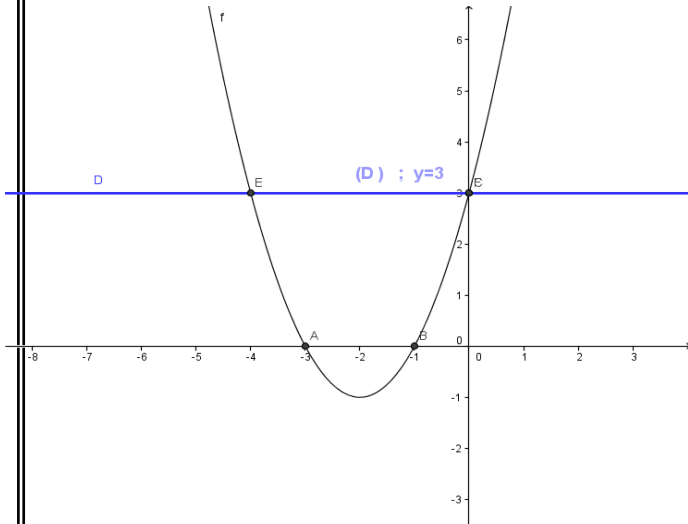
نحسب فقط:  $f(0)$

$$f(0) = 3$$

ومنه نقطة التقاطع هي:  $C(0;3)$

4) رسم:  $C_f$

-5	-4	-3	-2	-1	0	1
8	3	0	-1	0	3	8



5) حدد نقط تقاطع  $(C_f)$  و  $(D)$

نحل للمعادلة  $f(x) = 3$  يعني  $f(x) = 3$

$$(x+2)^2 - 1 = 3 \text{ يعني } f(x) = 3$$

يعني  $(x+2)^2 = 4$  يعني  $x+2 = 2$  أو  $x+2 = -2$

يعني  $x = 0$  أو  $x = -4$  ومنه نقط التقاطع هما:  $C(0;3)$  و  $E(-4;3)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

6) الحل المبياني للمتراجحة:  $x^2 + 4x \geq 0$

$$x^2 + 4x \geq 0 \text{ تعني } x^2 + 4x + 3 \geq 3 \text{ تعني } f(x) \geq 3$$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة  $f$  يوجد فوق

المستقيم  $(D)$  أي  $D = ]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$

**تمرين 35:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كالتالي:  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

1) حدد  $D_f$

2) أكتب  $f(x)$  على الشكل المختصر وحدد مقاربات منحنى الدالة  $f$

3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$

4) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة  $f$  مع محوري المعلم

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f(x)$			

5) أ) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور

الأفصيل نحل فقط المعادلة:  $f(x) = 0$  يعني  $-2(x-1)^2 + 1 = 0$

$$\text{يعني } -2(x-1)^2 = -1 \text{ يعني } (x-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني } x-1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ أو } x-1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{يعني } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \text{ أو } x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

ومنه نقط التقاطع هما:  $A\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}; 0\right)$  أو  $B\left(\frac{-\sqrt{2}+2}{2}; 0\right)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

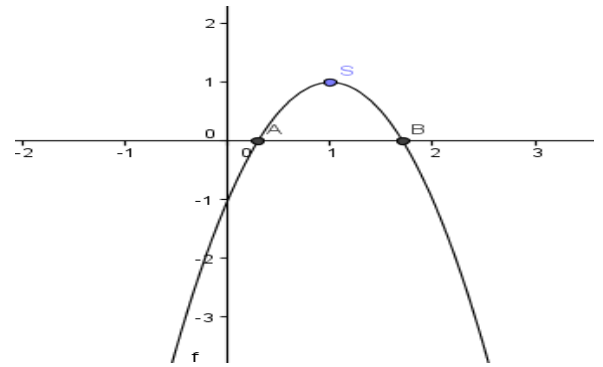
ب) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأرتيب

نحسب فقط:  $f(0)$

$$f(0) = -2 \times 0^2 + 4 \times 0 - 1 = -1$$

ومنه نقطة التقاطع هي:  $C(0; -1)$

6) رسم:  $C_f$



**تمرين 34:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = x^2 + 4x + 3$

1) بين أن:  $f(x) = (x+2)^2 - 1$  (يسمى الشكل القانوني

$$f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$$

2) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$

3) حدد نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محوري المعلم

4) أرسم  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  و المستقيم  $(D)$

الذي معادلته  $y = 3$  في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

5) حدد نقط تقاطع  $(C_f)$  و  $(D)$

6) حل مبيانيا في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $x^2 + 4x \geq 0$

**أجوبة:** 1)  $f(x) = x^2 + 4x + 3$

$D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 + 3$$

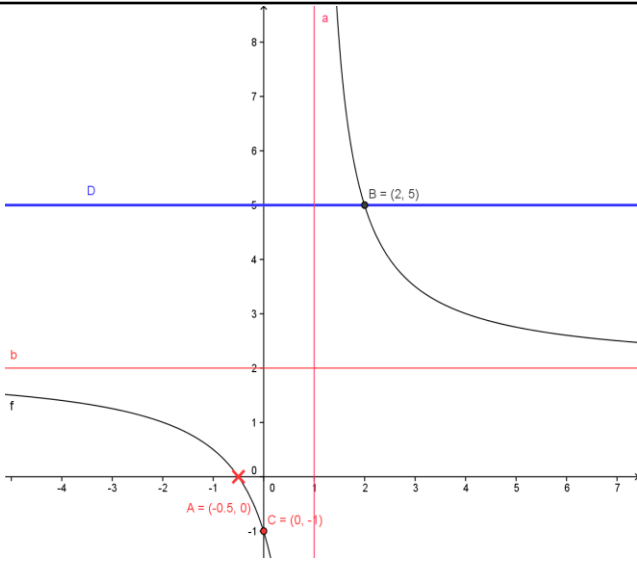
$$f(x) = (x+2)^2 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:

$$f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$$

نجد:  $\alpha = 2; \beta = -1; a = 1$

2) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ . لدينا:  $a = 1 > 0$  إذن:



(7) الحل المبياني للمعادلة  $f(x) = 5$  : هو أفاصيل نقط تقاطع  $C_f$

والمستقيم  $(D)$  أي أفصول النقطة  $B(2;0)$

ومنه مجموعة الحلول :  $S = \{2\}$

(ب) الحل الجبري للمعادلة  $f(x) = 5$  :

$$2x+1=5(x-1) \text{ يعني } \frac{2x+1}{x-1}=5 \text{ يعني } f(x)=5$$

$$\text{يعني } 2x+1=5x-5 \text{ يعني } -3x=-6 \text{ يعني } x=2$$

ومنه مجموعة الحلول :  $S = \{2\}$

(8) الحل المبياني للمترابحة:  $f(x) \geq 5$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة  $f$  يوجد فوق

المستقيم  $(D)$  أي  $S = ]1, 2]$

**تمرين 36:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كالتالي :  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

(1) حدد  $D_f$

(2) أكتب  $f(x)$  على الشكل المختصر

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$  باستعمال طريقة تغيير المعلم

$$\text{أجوبة : } f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$(1) D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

(2) انجاز القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ -2x+2 & \\ \hline & 3 \end{array}$$

إذا كانت :  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  فان :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$y-2 = \frac{3}{x-1} \text{ يعني } f(x)-2 = \frac{3}{x-1}$$

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases} \text{ انن : } \begin{cases} x-1 = X \\ y-2 = Y \end{cases} \text{ نضع}$$

(5) أرسم  $(C)$  التمثيل المبياني للدالة  $f$

(6) أرسم المستقيم الذي معادلته : الذي معادلته :  $y = 5$

(7) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة  $f(x) = 5$

(8) حل مبيانيا المترابحة:  $f(x) \geq 5$

$$\text{أجوبة : } f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$(1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\}$$

$$\text{ومنه } D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

(2) انجاز القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ -2x+2 & \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:  $f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$

$$\text{نجد : } \alpha = -1; \beta = 2; k = 3$$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ . لدينا :  $k = 3 > 0$  اذن :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

منحنى  $f$  هو هذلوليا مركزه  $A(1;2)$  ومقارباة  $x=1$  و  $y=2$

(4) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة :  $f(x) = 0$  يعني  $\frac{2x+1}{x-1} = 0$  يعني  $2x+1=0$

يعني  $2x = -1$  يعني  $x = -\frac{1}{2}$  ومنه نقطة التقاطع هي:  $A(-\frac{1}{2}; 0)$

(ب) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأرتايب

$$\text{نحسب فقط : } f(0) = -1$$

ومنه نقطة التقاطع هي:  $C(0; -1)$

(5) ورسم  $C_f$

-2	-1	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1	5	$\frac{7}{2}$	3	

$$\begin{array}{c|c} -2x+1 & 2x-4 \\ \hline 2x-4 & -1 \\ \hline -3 & \end{array}$$

إذا كانت:  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  فان:

$$f(x) = \frac{-(2x-4)-3}{2x-4} = \frac{-(2x-4)}{2x-4} + \frac{-3}{2x-4} = -1 + \frac{-3/2}{x-2}$$

$$y+1 = \frac{-3/2}{x-2} \quad \text{اذن} \quad f(x)+1 = \frac{-3/2}{x-2}$$

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases} \quad \text{اذن} \quad \begin{cases} x - 2 = X \\ y + 1 = Y \end{cases} \quad \text{نضع:}$$

$$W(2; -1) \quad \text{ونضع} \quad Y = \frac{-3/2}{X} \quad \text{يعني} \quad y = \frac{2x+1}{x-1}$$

اذن في المعلم  $(W; \vec{i}; \vec{j})$  معادلة التمثيل المبياني  $(C_f)$  للدالة  $f$

$$Y = y + 1 \quad \text{و} \quad X = x - 2 \quad \text{بحيث} \quad Y = \frac{-3/2}{X} \quad \text{هي}$$

في المعلم  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  التمثيل المبياني للدالة  $f$  هو هذلول مركزه

$W(2; -1)$  ومقاربات  $(C_f)$  هم:  $x = 2$  و  $y = -1$

$$(3) \quad \text{جدول تغيرات} \quad X \longrightarrow \frac{-3/2}{X} \quad (-3/2 < 0)$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$x \longrightarrow \frac{-2x+1}{2x-4} \quad \text{ومنه جدول تغيرات الدالة} \quad f$$

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

(4) رسم  $(C)$  التمثيل المبياني للدالة  $f$

لرسم  $(C)$  نقوم أولاً برسم منحنى الدالة  $X \longrightarrow \frac{-3/2}{X}$

ونقوم بعملية الازاحة  $\vec{W} = 2\vec{i} - 1\vec{j}$

$$Y = \frac{3}{X} \quad \text{يعني} \quad y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$(3 > 0) \quad X \longrightarrow \frac{3}{X}$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

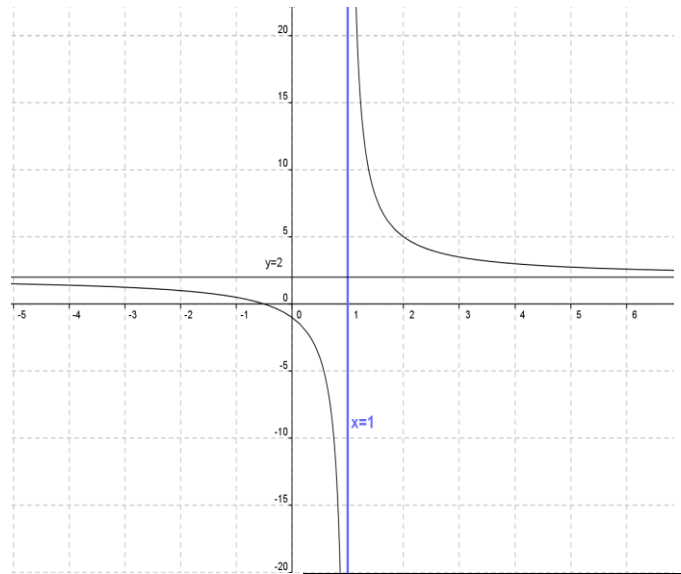
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$x \longrightarrow \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{ومنه جدول تغيرات الدالة} \quad f$$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

في المعلم  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  التمثيل المبياني للدالة هو هذلول مركزه

$W(1; 2)$



-2	1-	0	1	2	3	4
1	1/2	-1		5	7/2	3

**تمرين 37:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كالتالي:  $f(x) = \frac{-2x+1}{2x-4}$

(1) حدد  $D_f$

(2) أكتب  $f(x)$  على الشكل المختصر وحدد النقط المميزة للتمثيل

المبياني للدالة  $f$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$  باستعمال طريقة تغيير المعلم

(4) أرسم  $(C)$  التمثيل المبياني للدالة  $f$

$$\text{أجوبة:} \quad f(x) = \frac{-2x+1}{2x-4}$$

(1)  $f(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $2x-4 \neq 0$  يعني  $x \neq 2$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

(2) إنجاز القسمة الاقليدية:

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f(x)$			

منحنى  $f$  هو هذلولى مركزه  $S\left(1; \frac{3}{2}\right)$  ومقاربه  $x=1$  و  $y=\frac{3}{2}$

(4) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأفصيل

نحل فقط المعادلة:  $f(x)=0$  يعني  $\frac{3x-1}{2x-2}=0$  يعني  $3x-1=0$

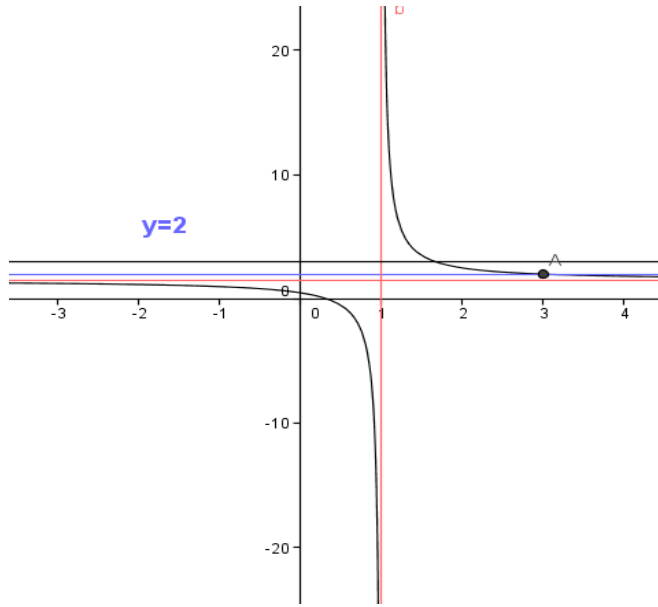
يعني  $3x=1$  يعني  $x=\frac{1}{3}$

ومنه نقطة التقاطع هي:  $A\left(\frac{1}{3}; 0\right)$

(ب) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأرتيب

ومنه نقطة التقاطع هي:  $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$   $f(0)=\frac{1}{2}$

(5 و 6)



(7) نحل للمعادلة  $f(x)=2$ :

$f(x)=2$  يعني  $\frac{3x-1}{2x-2}=2$  يعني  $3x-1=2(2x-2)$

يعني  $3x-1=4x-4$  يعني  $x=3$

ومنه نقطة التقاطع هي:  $C(3; 2)$

(8) الحل المبياني للمتراحة:  $f(x) \geq 2$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة  $f$  يوجد فوق

المستقيم  $(D)$  أي  $S = ]1, 3]$

**تمرين 39:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ .

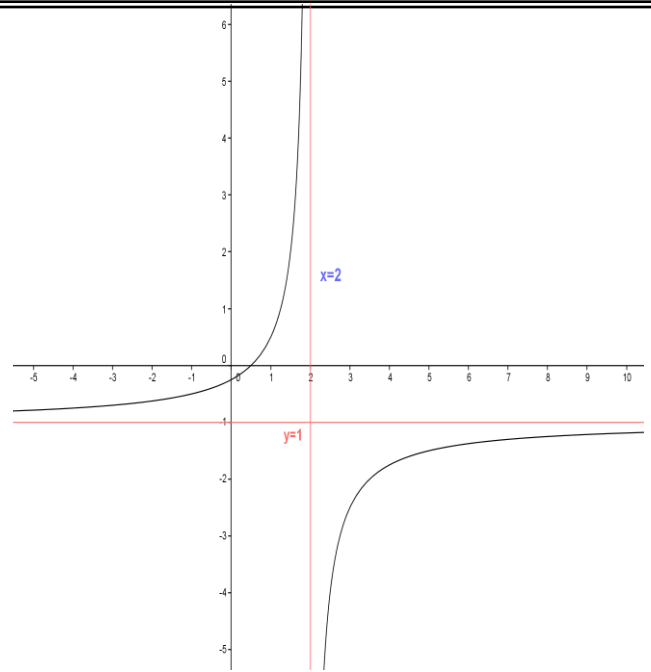
(1) أحسب  $f(-1)$  و تأكد أن:  $f(x) = (x+1)^2 + 2$

(2) تأكد أن:  $f(x) \geq f(-1)$  مهما تكن  $x$  من  $\mathbb{R}$  وماذا تستنتج؟

**أجوبة:** (1)  $f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$

(2)  $f(x) - f(-1) = (x+1)^2 + 2 - 2 = (x+1)^2 \geq 0$

ومنه:  $f(x) \geq f(-1)$  مهما تكن  $x$  من  $\mathbb{R}$ .



**تمرين 38:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كالتالي:  $f(x) = \frac{3x-1}{2x-2}$

(1) حدد  $D_f$

(2) أكتب  $f(x)$  على الشكل المختصر وحدد مقاربات منحنى الدالة  $f$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$

(4) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة  $f$  مع محوري المعلم

(5) أرسم  $(C)$  التمثيل المبياني للدالة

(6) أرسم المستقيم الذي معادلته: المستقيم  $(D)$  الذي معادلته:  $y=2$

(7) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة  $f$  و المستقيم  $(D)$

(8) حل مبيانيا المتراحة:  $f(x) \geq 2$

**أجوبة:**  $f(x) = \frac{3x-1}{2x-2}$

(1)  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$  ومنه  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-2 \neq 0\}$

(2) **انجاز القسمة الاقليدية:**

$$\begin{array}{r|l} 3x-1 & 2x-2 \\ \hline -3x+3 & \\ \hline 2 & \frac{3}{2} \\ & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x-2} = \frac{\frac{3}{2}(2x-2)+2}{2x-2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{x-1}$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:  $f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$

**نجد:**  $\alpha = -1; \beta = \frac{3}{2}; k = 1$

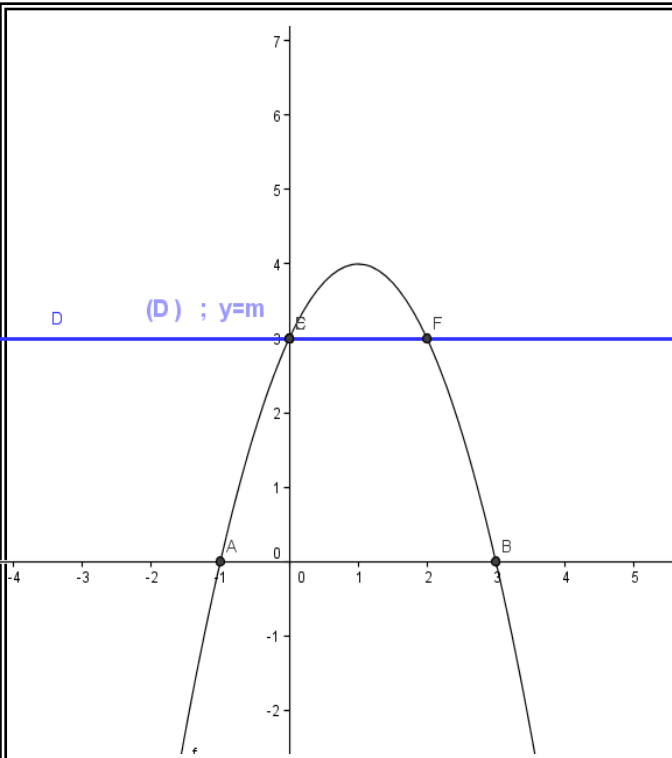
(3) حدد جدول

-2	-1	0	1	2	3	4
$\frac{7}{6}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{11}{6}$	

الدالة  $f$ . لدينا:

اذن:  $k=1 > 0$





$$f(x) = -(x-1)^2 + 4 \quad (5)$$

لدينا  $-(x-1)^2 \leq 0$  مهما تكن  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ومنه  $4 - (x-1)^2 \leq 4$  أي  $f(x) \leq 4$  مهما تكن  $x$  من  $\mathbb{R}$

وبالتالي إن 4 هي قيمة قصوى للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

يمكننا ملاحظة ذلك من جدول التغيرات

(6) المناقشة مبيانيا حسب قيم البارامتر  $m$  ل عدد حلول المعادلة

$$-x^2 + 2x + 3 - m = 0:$$

$$-x^2 + 2x + 3 = m \text{ تكافئ } -x^2 + 2x + 3 - m = 0 \text{ أي } f(x) = m$$

أي نحدد مبيانيا عدد نقط تقاطع منحنى الدالة  $f$  و المستقيم

$$y = m: \text{ الذي معادلته: } (D)$$

إذا كانت:  $m > 4$ : التمثيل المبياني لا يقطع المستقيم  $(D)$  ومنه لا

$$S = \emptyset \text{ يوجد حل لهذه المعادلة أي}$$

إذا كانت:  $m = 4$ : التمثيل المبياني يقطع المستقيم  $(D)$  في نقطة

$$S = \{x_1\}$$

وحيدة ومنه للمعادلة حل وحيد

إذا كانت:  $m < 4$ : التمثيل المبياني يقطع المستقيم  $(D)$  في نقطتين

$$S = \{x_1, x_2\}$$

تمرين 41: لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ .

(1) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$

(2) أدرس زوجية الدالة  $f$  (3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$

(4) هل الدالة  $f$  تقبل قيمة دنيا أو قيمة قصوى؟

(5) أرسم  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد

منظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

(6) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة  $f(x) = 1$

أستنتج أن:  $f(-1)$  هي قيمة دنيا للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

تمرين 40: لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ .

(1) حدد  $D_f$  وبيّن أن:  $f(x) = -(x-1)^2 + 4$

(2) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(3) حدد نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور

الأفاصيل

ومع محور لأراتييب.

(4) أرسم  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$ .

(5) حدد مطارييف الدالة إن وجدت.

(6) ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر  $m$  عدد حلول المعادلة

$$-x^2 + 2x + 3 - m = 0:$$

أجوبة:

(1)  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x) + 3 = -(x^2 - 2x \times 1 + 1^2 - 1^2) + 3 + 1 = -(x-1)^2 + 4$$

$$f(x) = -(x-1)^2 + 4$$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:

$$f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$$

نجد:  $\alpha = -1; \beta = 4; a = -1$

(2) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$

لدينا:  $a < 0$  إذن:

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		4	

(3) (أ)نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة:  $f(x) = 0$  يعني  $-x^2 + 2x + 3 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = -1 \text{ و } b = 2 \text{ و } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-2} = 3 \text{ و } x_1 = \frac{-(2) + \sqrt{16}}{-2} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هما:  $A(-1; 0)$  أو  $B(3; 0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة بطريقة أخرى باستعمال الكتابة الأخرى ل  $f(x)$

(ب)نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأراتيب

نحسب فقط:  $f(0)$

$$f(0) = -0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3$$

(4) أرسم:  $C_f$

$x$	0	1
$y$	2	$\frac{5}{2}$

-2	-1	0	1	2	3	4
-5	0	3	4	3	0	-5

وبما أن نقط التقاطع هما  $B(-2,1)$  و  $E(4,4)$

ومنه فإن مجموعة الحلول:  $S = \{-2; 4\}$

(أ) الحل الجبري للمعادلة  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \text{ يعني } x^2 = 2x + 8 \text{ يعني } \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36 = (6)^2 > 0 \text{ يعني}$$

بما أن  $\Delta > 0$  فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = -2 \text{ و } x_1 = 4$$

ومنه فإن مجموعة الحلول:  $S = \{-2; 4\}$

(9) (أ) الحل المبياني للمعادلة  $\frac{1}{4}x^2 - 2 \geq \frac{1}{2}x$

$$f(x) \geq \frac{1}{2}x + 2 \text{ يعني } \frac{1}{4}x^2 \geq \frac{1}{2}x + 2$$

ومنه مبيانياً نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة  $f$  يوجد فوق

المستقيم  $(D) : y = \frac{1}{2}x + 2$  أي  $S = ]-\infty, -2] \cup [4, +\infty[$

(ب) الحل الجبري للمعادلة  $\frac{1}{4}x^2 - 2 \geq \frac{1}{2}x$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0 \text{ يعني } x^2 \geq 2x + 8 \text{ يعني } \frac{1}{4}x^2 - 2 \geq \frac{1}{2}x$$

$$x_2 = -2 \text{ و } x_1 = 4$$

جدول الإشارة:

$x$	$-\infty$	$-2$	$4$	$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$	$+$	$0$	$-$	$+$

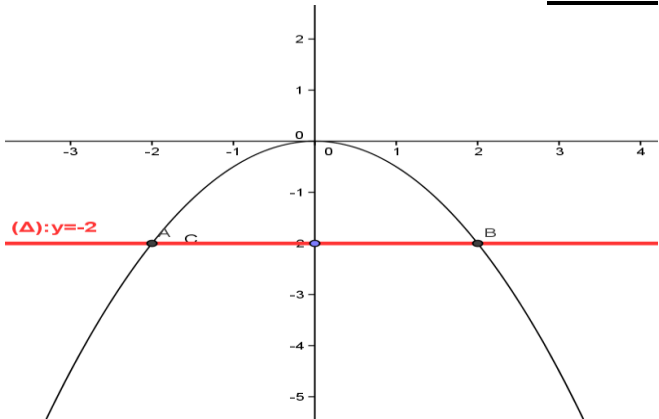
أي  $S = ]-\infty, -2] \cup [4, +\infty[$

**تمرين 42:** لتكن  $f$  دالة معرفة ب:  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

(1) مثل الدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ .

(2) حل مبيانياً المتراجحة  $f(x) > -2$

**الأجوبة:**



(2) مبيانياً نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة

$f$  يوجد فوق المستقيم  $(\Delta) : y = -2$  أي  $S = ]-2, 2]$

**تمرين 43:** لتكن  $f$  الدالة المعرفة ب:  $f(x) = \frac{2}{x}$

والمستقيم الذي معادلته:  $(D) : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

(1) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(7) أرسم المستقيم الذي معادلته:  $(D) : y = \frac{1}{2}x + 2$

(8) حل مبيانياً ثم جبرياً المعادلة  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

(9) حل مبيانياً ثم جبرياً المتراجحة:  $\frac{1}{4}x^2 - 2 \geq \frac{1}{2}x$

**أجوبة: (1)**  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

(2) (أ) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $-x$  تنتمي إلى  $\mathbb{R}$ .

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^2 = \frac{1}{4}x^2 = f(x) \text{ (ب)}$$

ومنه  $f$  دالة زوجية

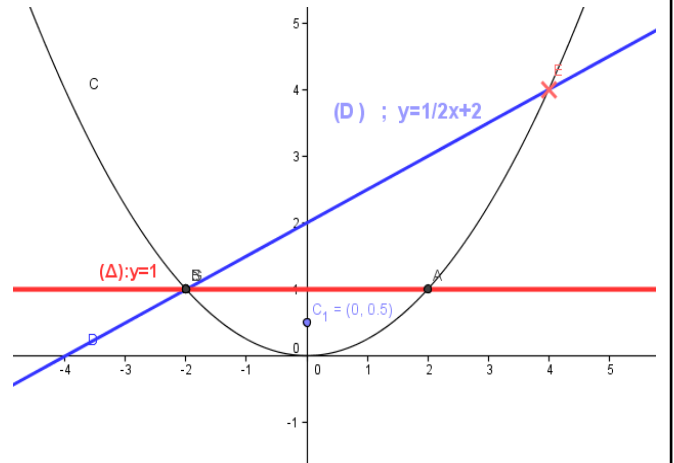
(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$		$0$	

(4) الدالة  $f$  تقبل قيمة دنيا عند  $x = 0$

(5) رسم  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$

$x$	$0$	$1$	$2$	$3$
$f(x)$	$0$	$\frac{1}{4}$	$1$	$\frac{9}{4}$



(6) (أ) الحل المبياني للمعادلة:  $f(x) = 1$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع  $C_f$  و

المستقيم  $(\Delta) : y = 1$

وبما أن نقط التقاطع هما  $A(2,1)$  و  $B(-2,1)$

فإن مجموعة الحلول:  $S = \{-2; 2\}$

(ب) الحل الجبري للمعادلة:  $f(x) = 1$

$$\frac{1}{4}x^2 = 1 \text{ يعني } x^2 = 4 \text{ يعني } x = \sqrt{4} \text{ أو } x = -\sqrt{4} \text{ يعني } x = 2$$

$$\text{أو } x = -2$$

ومنه فإن مجموعة الحلول:  $S = \{-2; 2\}$

(7) رسم المستقيم الذي معادلته:  $(D) : y = \frac{1}{2}x + 2$

(8) (أ) الحل المبياني للمعادلة  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع  $C_f$  و

المستقيم  $(D) : y = \frac{1}{2}x + 2$

(2) أدرس زوجية الدالة  $f$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(4) أرسم  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  والمستقيم  $(D)$  في معلم

(5) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة  $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

(6) حل مبيانيا المتراجحة :  $\frac{2}{x} \geq \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

**أجوبة: (1)**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

ومنه :  $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

(2) أ) لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  لدينا:  $-x$  تنتمي إلى  $\mathbb{R}^*$ .

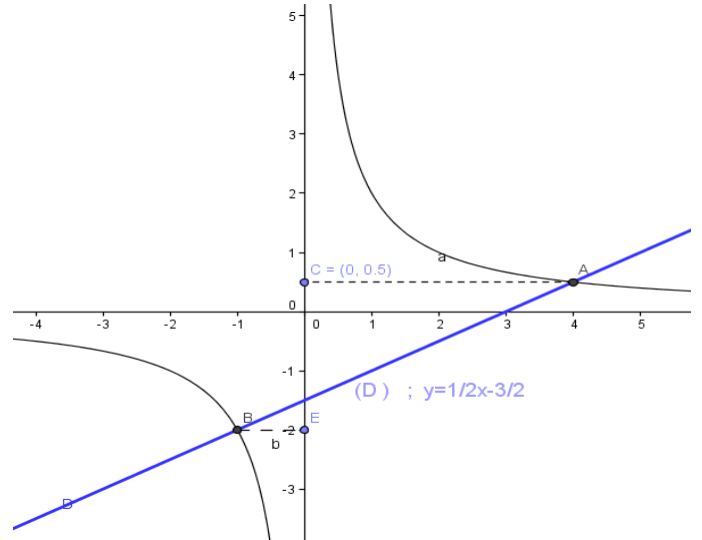
ب)  $f(-x) = \frac{2}{(-x)} = -\frac{2}{x} = -f(x)$

ومنه  $f$  الدالة فردية

(3) جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$			

(4) منحنى الدالة  $f$ .



(5) الحل المبياني للمعادلة:  $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$f(x) = y$  يعني  $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

الحل المبياني للمعادلة هو أفاصيل نقط تقاطع  $C_f$  و  $(D)$  والمستقيم

وبما أن نقط التقاطع هما  $A(4, \frac{1}{2})$  و  $A(-1, -2)$

فان مجموعة الحلول :  $S = \{-1; 4\}$

الحل الجبري للمعادلة :  $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$   $x \neq 0$

$2x \times \frac{2}{x} = 2x \times (\frac{1}{2}x - \frac{3}{2})$  يعني  $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

(بضرب طرفي المعادلة في  $2x$ )

يعني  $4 = x^2 - 3x$  يعني  $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 = (5)^2 > 0$

بما أن  $\Delta > 0$  فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  و  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = -1$  و  $x_1 = 4$

ومنه فان مجموعة الحلول :  $S = \{-1; 4\}$

(6) حل مبيانيا المتراجحة :  $\frac{2}{x} \geq \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

مبيانيا نبحت عن المجال بحيث منحنى الدالة  $f$  يوجد فوق

المستقيم  $(D)$  أي  $S = ]-\infty, -1] \cup [0, 4[$

**تمرين 44:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كالتالي :  $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

(1) حدد  $D_f$  (2) تحقق أن :  $f(x) = -(x-2)^2 + 9$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$

(4) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة  $f$  مع محوري المعلم

(5) أرسم  $(C)$  التمثيل المبياني للدالة  $f$

(6) حدد القيم الدنيا والقصوى ان وجدت

(7) ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر  $m$  عدد حلول المعادلة

$x^2 - 4x - 5 + m = 0$ :

**أجوبة: (1)**  $D_f = \mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية

(2)  $f(x) = -x^2 + 4x + 5 = -(x^2 - 4x) + 5 = -(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2) + 5$

$f(x) = -(x-2)^2 + 4 + 5 = -(x-2)^2 + 9$

بالمقارنة مع كتابة الشكل القانوني:  $f(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$

نجد :  $\alpha = -2; \beta = 9; a = -1$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $f$ . لدينا :  $a < 0$  اذن :

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f(x)$		$9$	

(4) أ) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة :  $f(x) = 0$  يعني  $-x^2 + 4x + 5 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a = -1$  و  $b = 4$  و  $c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 36 = (6)^2 > 0$

بما أن  $\Delta > 0$  فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  و  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{-2} = 5$  و  $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{-2} = -1$

ومنه نقط التقاطع هما:  $A(-1; 0)$  أو  $B(5; 0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة بطريقة أخرى باستعمال الكتابة الأخرى ل  $f(x)$

ب) نقط تقاطع  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأرتايب

نحسب فقط :  $f(0) = -0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3$   $f(0) = 3$

ومنه نقطة التقاطع هي:  $C(0; 3)$

(5) رسم:  $C_f$

-2	-1	0	1	2	3	4
-5	0	3	4	9	0	-5

(2) حسب السؤال السابق:  $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$

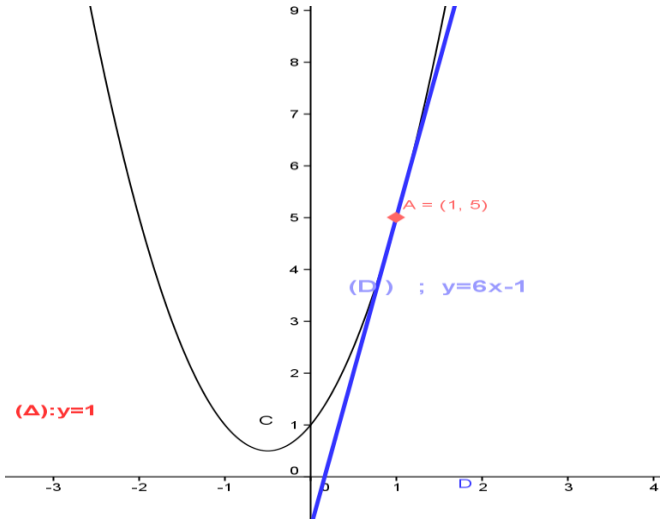
نتحقق أن:  $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 2\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{2}$$

$$= 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2x^2 + 2x + 1 = f(x)$$

ومنه جدول تغيرات الدالة  $f$ .  
(3)



(4) (أ) (ب) يجب أن نبين أن  $f(x) - y \geq 0$ ؟؟؟؟

$$f(x) - y = 2x^2 + 2x + 1 - 6x + 1 = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 2(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) = 2(x-1)^2 \geq 0$$

لأن المربع دائما موجب  
ومنه  $f(x) \geq y$  وبالتالي  $(C_f)$  يوجد فوق المستقيم  $(D)$

**تمرين 46:** نعتبر الدالة  $g$  المعرفة كالتالي:  $g(x) = \frac{-x}{x-2}$

(1) حدد  $D_g$

(2) أكتب  $g(x)$  على الشكل المختصر وحدد النقط المميزة للتمثيل

المبياني للدالة  $g$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة  $g$  باستعمال طريقة تغيير المعلم

(4) أرسم  $(C)$  التمثيل المبياني للدالة  $g$

$$g(x) = \frac{-x}{x-2} \quad \text{أجوبة:}$$

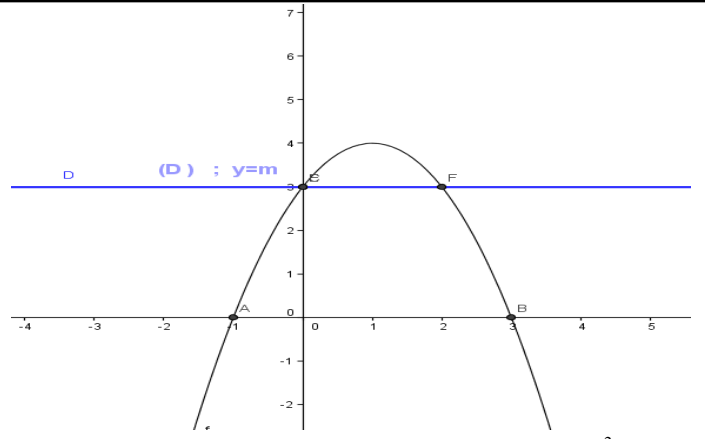
(1)  $g(x) \in \mathbb{R}$  يعني  $x-2 \neq 0$  يعني  $x \neq 2$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

(2) انجاز القسمة الاقليدية:

$-x$	$x-2$
$x-2$	$-1$
$-2$	

إذا كانت:  $\{2\} \in \mathbb{R}$  فان:



$$f(x) = -(x-1)^2 + 4 \quad (6)$$

لدينا  $-(x-1)^2 \leq 0$  مهما تكن  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

ومنه  $4 - (x-1)^2 \leq 4$  أي  $f(x) \leq 4$  مهما تكن  $x$  من  $\mathbb{R}$

وبالتالي إن 4 هي قيمة قصوى للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

يمكننا ملاحظة ذلك من جدول التغيرات

(7) المناقشة مبيانيا حسب قيم البارامتر  $m$  ل عدد حلول المعادلة

$$-x^2 + 2x + 3 - m = 0:$$

$$f(x) = m \quad \text{أي} \quad -x^2 + 2x + 3 = m \quad \text{تكافئ} \quad -x^2 + 2x + 3 - m = 0$$

أي نحدد مبيانيا عدد نقط تقاطع منحنى الدالة  $f$  و المستقيم

$(D)$  الذي معادلته:  $y = m$

إذا كانت:  $m > 4$  التمثيل المبياني لا يقطع المستقيم  $(D)$  ومنه لا

يوجد حل لهذه المعادلة أي  $S = \emptyset$

إذا كانت:  $m = 4$  التمثيل المبياني يقطع المستقيم  $(D)$  في نقطة

وحيدة ومنه للمعادلة حل وحيد  $S = \{x_1\}$

إذا كانت:  $m < 4$  التمثيل المبياني يقطع المستقيم  $(D)$  في نقطتين

ومنه للمعادلة حلين مختلفين  $S = \{x_1, x_2\}$

**تمرين 45:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كالتالي:  $f(x) = ax^2 + bx + 1$

(1) حدد  $a$  و  $b$  علما أن  $(C_f)$  التمثيل المبياني للدالة  $f$  يمر من

النقطتين  $A(1, 5)$  و  $B(-1, 1)$

(2) تحقق أن:  $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$  وحدد جدول تغيرات  $f$

(3) أرسم  $(C_f)$

(4) نعتبر المستقيم الذي معادلته  $y = 6x - 1$   $(D)$

(أ) أرسم  $(D)$

(ب) بين أن التمثيل المبياني للدالة  $f$  يوجد فوق المستقيم  $(D)$

$$f(x) = ax^2 + bx + 1$$

(الأجوبة: 1)

$$A(1, 5) \in (C_f) \text{ يعني } f(1) = 5: \text{ يعني } a \times (1)^2 + b \times 1 + 1 = 5$$

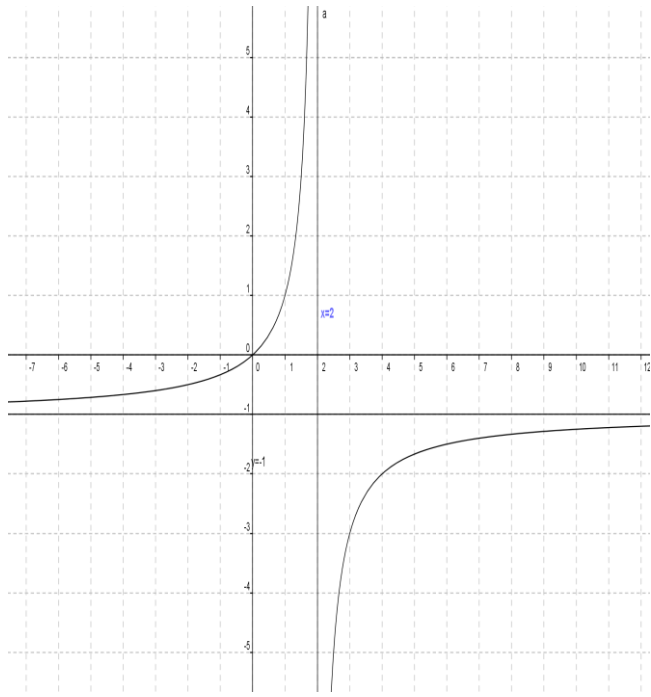
$$B(-1, 1) \in (C_f) \text{ يعني } f(-1) = 1: \text{ يعني } a \times (-1)^2 + b \times (-1) + 1 = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 5 \\ a - b + 1 = 1 \end{cases}$$

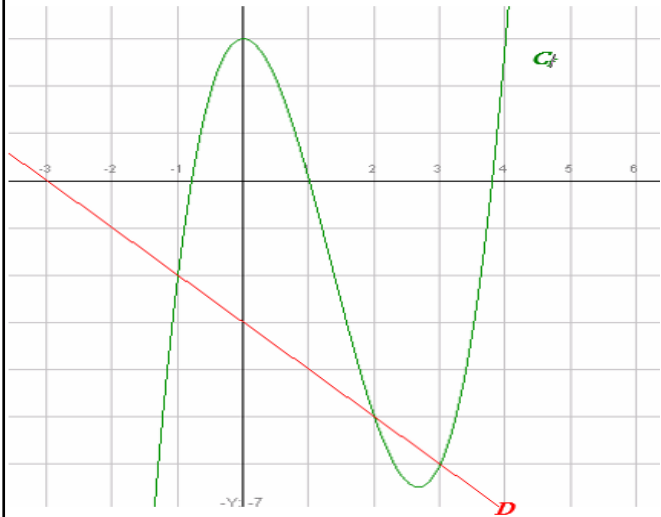
اذن نحل النظام التالية:

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد:  $2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$

ولدينا  $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$  ومنه  $a = b = 2$



**تمرين 47:** التمثيل التالي  $(C_f)$  يمثل التمثيل المبياني للدالة  $f$  المعرفة كالتالي:  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$  ونعتبر المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = -x - 3$



- 1) حل مبيانيا المعادلة  $f(x) = 3$  و المتراجحة  $f(x) < 3$
- 2) حل مبيانيا المعادلة  $f(x) = 0$  و المتراجحة  $f(x) \geq 0$  (اعط فقط تأطير ان أمكن)
- 3) حل مبيانيا المعادلة  $f(x) = -x - 3$  و المتراجحة  $f(x) \leq -x - 3$

**الأجوبة: (1)**

- 1) حلول المعادلة  $f(x) = 3$  هي مجموعة سوابق العدد 3 ومنه  $S = \{0; 4\}$
- 2) حلول المعادلة  $f(x) = 0$  هي مجموعة سوابق العدد 0 ومنه  $S = \{a; 1; b\}$  حيث  $-1 < a < -0.5$  و  $3.5 < b < 4$
- 3) حلول المتراجحة  $f(x) \geq 0$  هي  $S = [a; 1] \cup [b; +\infty[$  في  $f(x) = -x - 3$  (أ) الحل المبياني للمعادلة  $f(x) = -x - 3$

$$g(x) = \frac{-x}{x-2} = \frac{-1(x-2)-2}{x-2} = \frac{-1(x-2)}{x-2} + \frac{-2}{x-2} = -1 + \frac{-2}{x-2}$$

اذن:  $g(x) + 1 = \frac{-2}{x-2}$  اذن:  $y + 1 = \frac{-2}{x-2}$

نضع:  $\begin{cases} x = X + 2 \\ y + 1 = Y \end{cases}$  اذن:  $\begin{cases} x - 2 = X \\ y + 1 = Y \end{cases}$

ونضع:  $W(2; -1)$  يعني  $Y = \frac{-2}{X}$  و  $y = \frac{-x}{x-2}$

اذن في المعلم  $(W; \vec{i}; \vec{j})$  معادلة التمثيل المبياني  $(C_g)$  للدالة  $g$  هي  $Y = \frac{-2}{X}$  بحيث  $X = x - 2$  و  $Y = y + 1$

في المعلم  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  التمثيل المبياني للدالة  $g$  هو هذلول مركزه  $W(2; -1)$  ومقاربات  $(C_g)$  هم:  $x = 2$  و  $y = -1$

3) جدول تغيرات  $X \rightarrow \frac{-2}{X}$  ( $-2 < 0$ )

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

ومنه جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$$x \rightarrow \frac{-x}{x-2}$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$

4) رسم  $(C)$  التمثيل المبياني للدالة  $f$

لرسم  $(C)$  نقوم أولاً برسم منحنى الدالة  $X \rightarrow \frac{-2}{X}$

-1	0	1	2	3	4	5
-1/3	0	1		-3	-2	-5/3

ونقوم بعملية الازاحة  $\vec{W} = 2\vec{i} - 1\vec{j}$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 - 10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$S = \{-2; 8\} \text{ ومنه}$$

3(أ) الحل المبياني للمترابحة  $f(x) \geq g(x)$

التمثيل المبياني ( $C_f$ ) للدالة  $f$  يوجد فوق التمثيل المبياني ( $C_g$ )

للدالة  $g$  يعني  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]8; +\infty[$

$$S = ]-\infty; -2[ \cup ]8; +\infty[ \text{ ومنه}$$

3(أ) الحل الجبري للمترابحة  $f(x) \geq g(x)$

$$x^2 - 3x - 4 \geq 3x + 12 \text{ يعني } f(x) \geq g(x)$$

$$x^2 - 6x - 16 > 0 \text{ يعني}$$

$$\text{الجذور هما: } x_1 = 8 \text{ و } x_2 = -2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$8$	$+\infty$	
$x^2 - 6x - 16$	+	0	-	0	+

$$\text{ومنه: } S = ]-\infty; -2[ \cup ]8; +\infty[$$

4(أ) نقط تقاطع ( $C_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأفاصيل

$$\text{نحل فقط المعادلة: } f(x) = 0 \text{ يعني } x^2 - 3x - 4 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = 1 \text{ و } b = -3 \text{ و } c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = (5)^2 > 0$$

بما أن  $\Delta > 0$  فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{و } x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هما:  $C(-1; 0)$  أو  $D(4; 0)$

ب) نقط تقاطع ( $C_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  مع محور الأرتاب

$$\text{نحسب فقط: } f(0) = 0^2 - 3 \times 0 - 4 = -4$$

ومنه نقطة التقاطع هي:  $E(0; -4)$

هي نقط تقاطع ( $C_f$ ) والمستقيم ( $D$ )

$$\text{الذي معادلته } y = -x - 3$$

$$\text{ومنه } S = \{-1; 2; 3\}$$

3(ب) الحل المبياني للمترابحة  $f(x) \leq -x - 3$

مبيانيا نبحث عن المجال بحيث منحنى الدالة  $f$  يوجد تحت

$$\text{المستقيم } y = -x - 3 : (D) \text{ أي } S = ]-\infty; -1] \cup [2; 3]$$

**تمرين 48:** نعتبر الدالة  $f$  و  $g$  المعرفتين كالتالي :

$$g(x) = 3x + 12 \text{ و } f(x) = x^2 - 3x - 4$$

1) أرسم التمثيلين المبيانيين ( $C_f$ ) و ( $C_g$ ) للدالتين  $f$  و  $g$  في

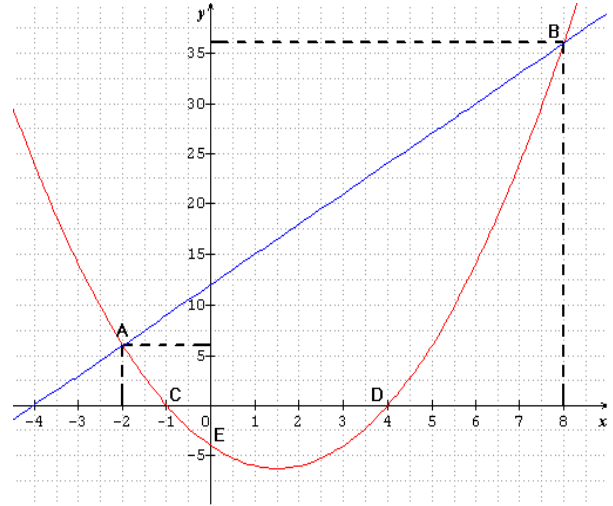
نفس المعلم

2) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلة  $f(x) = g(x)$

3) حل مبيانيا ثم جبريا المترابحة  $f(x) \geq g(x)$

4) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة  $f$  مع محوري المعلم

**الأجوبة: (1)**



بالأزرق ( $C_f$ ) التمثيل المبياني للدالة  $f$

وبالأحمر ( $C_g$ ) التمثيل المبياني للدالة  $g$

2(أ) الحل المبياني للمعادلة  $f(x) = g(x)$

يكفي البحث عن نقط تقاطع ( $C_f$ ) و ( $C_g$ )

من خلال الشكل نجد:  $x = 8$  و  $x = -2$  ومنه  $S = \{-2; 8\}$

2(أ) الحل الجبري للمعادلة  $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \text{ يعني } x^2 - 3x - 4 = 3x + 12$$

$$\text{يعني } x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -6 \text{ et } c = -16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{و } x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8$$