

## حلول

### تمرين 1

1- مضاعفات العدد 14 الأصغر من 200 هي 0 ، 14 ، 28 ، 42 ، 56 ، 70 ، 84 ، 98 ، 112 ، 126 ، 140 ، 154 ، 168 ، 182 ، 196 .

2- قواسم العدد 1470 هي 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 10 ، 14 ، 15 ، 21 ، 30 ، 35 ، 42 ، 49 ، 70 ، 98 ، 105 ، 147 ، 210 ، 245 ، 294 ، 490 ، 735 ، 1470 .

3- أ- المضاعفات المشتركة للعددين  $a=37$  و  $b=79$  هي مضاعفات العدد  $37 \times 79$   
ب-  $a=65=5 \times 13$  و  $b=42=2 \times 3 \times 7$

المضاعفات المشتركة للعددين 65 و 42 هي مضاعفات  $65 \times 42$

ج-  $a=70=2 \times 5 \times 7$  و  $b=14=2 \times 7$  هي مضاعفات  $14 \times 5$

د-  $a=46=2 \times 23$  و  $b=76=2^2 \times 19$  هي مضاعفات العدد  $2^2 \times 19 \times 23$

4- أ-  $a=54=2 \times 3^2$  و  $b=42=2 \times 3 \times 7$

القواسم المشتركة للعددين 54 و 42 هي 1 ، 2 ، 3 ، 6

ب-  $a=336=2^4 \times 3 \times 7$  و  $b=80=2^4 \times 5$

القواسم المشتركة للعددين 336 و 80 هي 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، 16

ج-  $a=72=2^3 \times 3^2$  و  $b=35=5 \times 7$

القاسم المشترك الوحيد للعددين 72 و 35 هو 1

د-  $a=83$  و  $b=67$  عددان أوليان

القاسم المشترك الوحيد للعددين 83 و 67 هو 1

### تمرين 2

1- 49 عدد غير أولي لانه يقبل القسمة على 7

لدينا الأعداد الأولية 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 لا تقسم العدد 239 و  $17^2 < 239 < 23^2$   
إذن العدد 239 أولي

.....  
.....

2- التفكير إلى جداء عوامل أولية

$$6250=2 \times 5^5 \quad , \quad 5292=2^2 \times 3^2 \times 7^2 \quad , \quad 1650=2 \times 3 \times 5^2 \times 11 \quad , \quad 675=3^3 \times 5^2$$

### تمرين 3

1- أ-  $a=27=3^3$  و  $b=42=2 \times 3 \times 7$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  هو  $2 \times 3^3 \times 7 = 378$

ب-  $a=19$  و  $b=37$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  هو  $19 \times 37 = 676$

ج-  $a=72=2^3 \times 9^2$  و  $b=35=5 \times 7$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  هو  $35 \times 72 = 2520$

2- أ-  $a=81=3^4$  و  $b=126=2 \times 3^2 \times 7$

القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو  $3^2 = 9$

ب-  $a=19$  و  $b=37$

القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو 1

ج-  $a=72=2^3 \times 3^2$  و  $b=35=7 \times 5$

القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو 1

#### تمرين 4

نحدد الأرقام  $a, b, c$

1- العدد  $23a4$  يقبل القسمة على 3 يعني أن  $0 \leq a \leq 9$  و  $a+9$  يقبل القسمة على 3

ومنه  $a=0$  أو  $a=3$  أو  $a=6$  أو  $a=9$

2- العدد  $23a4$  يقبل القسمة على 3 ولا يقبل القسمة على 9 يعني أن  $0 \leq a \leq 9$  و  $a+9$  يقبل

القسمة على 3 ولا يقبل القسمة على 9 ومنه  $a=3$  أو  $a=6$

3- العدد  $23b5c$  يقبل القسمة على 3 و على 5 يعني  $0 \leq b \leq 9$  و  $c \in \{0;5\}$  و  $10+b+c$  تقبل القسمة

على 3

- إذا كان  $c=0$  فإن

$0 \leq b \leq 9$  و  $10+b+c$  تقبل القسمة على 3 تعني  $b=2$  أو  $b=5$  أو  $b=8$

- إذا كان  $c=5$  فإن

$0 \leq b \leq 9$  و  $10+b+c$  تقبل القسمة على 3 تعني  $b=0$  أو  $b=3$  أو  $b=6$  أو  $b=9$

#### تمرين 5

ليكن  $m$  و  $n$  عددين صحيحين طبيعيين حيث  $PGCD(m;n)=24$  و  $n \leq m$

$$1- PGCD(m;n)=24=2^3 \times 3$$

العوامل الأولية المشتركة للعددين  $m$  و  $n$  هي 2 و 3

2- لدينا  $m.n=3456$

$$PGCD(m;n)=24 \text{ و } m.n=PGCD(m;n) \times PPCM(m;n)$$

$$\text{ومنه } PPCM(m;n)=\frac{3456}{24}=144=2^4 \times 3^2$$

وحيث أن  $n \leq m$  فإن

$$(n=2^3 \times 3=24 \text{ و } m=2^3 \times 3 \times 3 \times 2=144) \text{ أو } (n=2^3 \times 3 \times 2=48 \text{ و } m=2^3 \times 3 \times 3=72)$$

#### تمرين 6

$$a=2^3 \times 3^2 \times 7$$

1- نتأكد أن العدد  $a$  يقبل 24 قاسم

$$a=2^3 \times 3^2 \times 7=24 \times (3 \times 7) \text{ إذن العدد } a \text{ يقبل 24 قاسم}$$

2- نحدد أصغر عدد صحيح طبيعي  $k$  حيث  $ka$  مربع كامل (أي مربع عدد صحيح طبيعي)

$$\text{لدينا } a=2^3 \times 3^2 \times 7 \text{ ومنه } a=2^3 \times 3^2 \times 7^2=(2^2 \times 3 \times 7)^2 \text{ ومنه } k=14$$

3- نحدد أصغر عدد صحيح طبيعي  $m$  حيث  $ma$  مكعب لعدد صحيح طبيعي

$$\text{لدينا } a=2^3 \times 3^2 \times 7 \text{ ومنه } a=2^3 \times 3^3 \times 7^3=(2 \times 3 \times 7)^3 \text{ ومنه } k=147$$

#### تمرين 7

1- نبين أن مجموع خمسة أعداد صحيحة طبيعية متتالية هو عدد صحيح طبيعي يقبل القسمة على 5

ليكن  $a$  عدد صحيح طبيعي

$$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)=5a+10=5(a+2)$$

وحيث أن  $(a+2) \in \mathbb{N}$  فإن  $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)$  يقبل القسمة على 5

2- ليكن  $a$  عدد صحيح طبيعي

نبين أن  $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$  مربع كامل

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2)(a+3)+1 &= (a^2+a)(a^2+5a+6)+1 \\ &= a^4+6a^3+11a^2+6a+1 \\ &= a^4+6a^3+2a^2+9a^2+6a+1 \\ &= a^4+2a^2(3a+1)+(3a+1)^2 \\ &= (a^2+3a+1)^2 \end{aligned}$$

إذن  $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$  مربع كامل

### تمرين 8

1- ننشر  $(n+1)^2 - n^2$

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

2- نستنتج أن كل عدد فردي يكتب على شكل فرق مربع عددين صحيحين طبيعيين متتاليين.

لدينا  $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$  مهما كانت  $n$  من  $\mathbb{N}$

إذن كل عدد فردي يكتب على شكل فرق مربع عددين صحيحين طبيعيين متتاليين

3- طبق الاستنتاج السابق على الأعداد 17 ، 45 ، 101

$$101 = 2 \times 50 + 1 = 51^2 - 50^2 \quad ; \quad 45 = 2 \times 22 + 1 = 23^2 - 22^2 \quad ; \quad 17 = 2 \times 8 + 1 = 9^2 - 8^2$$

### تمرين 9

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا

ندرس زوجية كل من  $n(n+1)$  و  $n+(n+1)+(n+2)$  و  $4n^2+4n+1$  و  $3n^2+n$

1- \*  $n$  و  $n+1$  عددان صحيحان طبيعيان متتاليان ومنه أحدهما زوجي و الآخر فردي

و التالي جداؤهما زوجي إذن  $n(n+1)$  زوجي

\* لدينا  $n+(n+1)+(n+2) = 3(n+1)$  و التالي زوجية  $n+(n+1)+(n+2)$  هي زوجية  $n+1$

إذا كان  $n$  زوجيا فان  $n+(n+1)+(n+2)$  فرديا

إذا كان  $n$  فرديا فان  $n+(n+1)+(n+2)$  زوجيا

\* لدينا  $4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$  و حيث أن  $(2n^2+2n) \in \mathbb{N}$  فان  $4n^2+4n+1$  زوجي

\* لدينا  $3n^2+n = n(n+3)$

$n$  و  $n+3$  ليس لهما نفس الزوجية أي احدهما فردي و الآخر زوجي أي اذا كان  $n$  زوجي فان

$n+3$  فردي و العكس صحيح

ومنه  $n(n+3)$  عدد زوجي إذن  $3n^2+n$  زوجي

### تمرين 10

ليكن  $n$  و  $m$  عددين صحيحين طبيعيين حيث  $m > n$

1- نبين أن  $m+n$  و  $m-n$  لهما نفس الزوجية

العدد  $(m-n)$  يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا

\* إذا كان  $(m-n)$  زوجيا فانه يوجد  $k$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $m-n=2k$  بإضافة  $2n$  لطرفي المتفاوتة

نحصل على  $m+n=2k+2n=2(k+n)$  وحيث أن  $k+n \in \mathbb{N}$  فان  $m+n$  زوجي

\* إذا كان  $(m-n)$  فرديا فانه يوجد  $k$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $m-n=2k+1$  بإضافة  $2n$  لطرفي المتفاوتة

نحصل على  $m+n=2k+2n+1=2(k+n)+1$  وحيث أن  $k+n \in \mathbb{N}$  فان  $m+n$  فرديا

إذن  $m+n$  و  $m-n$  لهما نفس الزوجية

$$2- \text{ نحل المعادلة } m^2 - n^2 = 196 \\ m^2 - n^2 = 196 \text{ تكافئ } (m-n)(m+n) = 2^2 \times 7^2$$

و حيث 196 زوجي فان  $m+n$  و  $m-n$  زوجيان

$$\text{ومنه } \begin{cases} m-n=2 \\ m+n=98 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m-n=14 \\ m+n=14 \end{cases} \\ \text{إذن } \begin{cases} m=50 \\ n=48 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m=14 \\ n=0 \end{cases}$$

### تمرين 11

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا فرديا

1- تأكد  $n^2 - 1$  مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية  $n=1$  ;  $n=3$  ;  $n=5$  ;  $n=7$

2- بين أن  $n^2 - 1$  مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي  $n$  ليكن  $n$  عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد  $k$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $n = 2k + 1$

$$\text{لدينا } n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \text{ ومنه } n^2 - 1 = 4k(k+1)$$

وحيث أن  $k(k+1)$  عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد  $k'$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $k(k+1) = 2k'$  و بالتالي  $n^2 - 1 = 8k'$

إذن  $n^2 - 1$  مضاعف للعدد 8

### تمرين 12

ليكن  $n$  و  $m$  و  $k$  أعداد صحيحة طبيعية

نبين أنه إذا كان  $3n+2m$  و  $7n+5m$  مضاعفين للعدد  $k$  فان  $n$  و  $m$  مضاعفين للعدد  $k$ .

$$\begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases} \text{ ومنه يوجد عددين صحيحين طبيعيين } a \text{ و } b \text{ حيث} \\ 5 \times \begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases} \text{ و } 7 \times \begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases} \text{ ومنه} \\ 2 \times \begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases} \text{ و } 3 \times \begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases}$$

$$\text{أي } \begin{cases} 21n+14m = 7ak \\ 21n+15m = 3bk \end{cases} \text{ و}$$

$$\text{ومنه } (21n+15m) - (21n+14m) = 3bk - 7ak \text{ و } (15n+10m) - (14n+10m) = 5ak - 2bk$$

$$\text{و بالتالي } m = (3b - 7a)k \text{ و } n = (5a - 2b)k$$

إذن  $n$  و  $m$  مضاعفين للعدد  $k$ .

### تمرين 13

$$1- \text{ نشر } (10^6 - 1)^3$$

$$(10^6 - 1)^3 = 10^{18} - 3 \times 10^{12} + 3 \times 10^6 - 1$$

2 - نستنتج باقي القسمة للعدد 999999<sup>3</sup> على 5

$$999999^3 = (10^6 - 1)^3 = 10^{18} - 3 \times 10^{12} + 3 \times 10^6 - 1$$

$$= 10^{18} - 3 \times 10^{12} + 3 \times 10^6 - 5 + 4$$

$$= 5(2 \times 10^{17} - 3 \times 5 \times 10^{11} + 3 \times 2 \times 10^5 - 1) + 4$$

وحيث أن  $(-1 + 3 \times 2 \times 10^5 + 3 \times 5 \times 10^{11} - 2 \times 10^{17}) \in \mathbb{N}$  فإن باقي القسمة للعدد  $999999^3$  على 5 هو 4

### تمرين 14

1- نحل المعادلة  $(x+1)(y+6)=35$   $(x; y) \in \mathbb{N}^2$

ليكن  $(x; y) \in \mathbb{N}^2$

$(x+1)(y+6)=35$  ومنه  $x+1$  و  $y+6$  يقسمان العدد 35 و  $1 \leq x+1 \leq 35$  و  $6 \leq y+6 \leq 35$   
أي  $x+1$  و  $y+6$  يقسمان العدد 35 و  $0 \leq x \leq 34$  و  $0 \leq y \leq 29$   
و حيث أن قواسم 35 هم 1 و 5 و 7 و 35 فإن

$$\begin{cases} x+1=1 \\ y+6=35 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+1=5 \\ y+6=7 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} x=0 \\ y=29 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

2- نحدد  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $x+y=504$  و  $PGCD(x; y)=24$

لدينا  $PGCD(x; y)=24$  و منه يوجد عدنان صحيحان طبيعيان غير منعدمين  $a$  و  $b$  حيث  $x=24a$

و  $y=24b$  حيث  $PGCD(a; b)=1$

و حيث أن  $x+y=504$  فإن  $24a+24b=504$  و منه  $a+b=21$

و بالتالي  $\begin{cases} a=1 \\ b=20 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} a=2 \\ b=19 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} a=4 \\ b=17 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} a=5 \\ b=16 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} a=8 \\ b=13 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} a=10 \\ b=11 \end{cases}$

و نحصل على نتائج الأخرى بإعطاء قيم  $a$  للعدد  $b$  و العكس لان  $a$  و  $b$  يلعبان دوران متماثلان .  
و بالتعويض في  $x=24a$  و  $y=24b$  نحصل على نتائج.....

3- نحدد الأرقام  $x$  و  $y$  بحيث العدد الصحيح الطبيعي  $11x1y$  قابل للقسمة على 28

العدد  $11x1y$  قابل للقسمة على 28 و منه  $11x1y$  قابل للقسمة على 4 و 7

و منه  $1y$  قابل للقسمة على 4 و بالتالي  $y=2$  أو  $y=6$

\* إذا كان  $y=2$  فإن  $11x12=11012+x \times 10^2=7 \times 1573+1+x \times 10^2$

وحيث  $11x12$  قابل للقسمة على 7 فإن  $x \times 10^2+1=\overline{x01}$  يقبل القسمة على 7  
ومنه  $x=3$

\* إذا كان  $y=6$  فإن  $11x62=11016+x \times 10^2=7 \times 1573+5+x \times 10^2$

وحيث  $11x16$  قابل للقسمة على 7 فإن  $x \times 10^2+5=\overline{x05}$  يقبل القسمة على 7  
ومنه  $x=3$  أو  $x=8$

إذن  $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$

### تمرين 15

ليكن  $n$  و  $k$  من  $\mathbb{N}$

1- نتأكد إذا كانت  $n=5k+1$  أو  $n=5k+4$  فإن  $n^2-1$  يقبل القسمة على 5

إذا كان  $n=5k+1$  فإن  $n^2-1=25k^2+10k=5(5k^2+2k)$

ومنه  $n^2-1$  يقبل القسمة على 5

إذا كان  $n=5k+4$  فإن  $n^2-1=25k^2+40k+15=5(5k^2+40k+3)$

ومنه  $n^2-1$  يقبل القسمة على 5

نتأكد إذا كانت  $n = 5k + 2$  أو  $n = 5k + 3$  فإن  $n^2 + 1$  يقبل القسمة على 5 بنفس الطريقة.....

2- نبين أنه مهما كان  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن العدد  $n(n^4 - 1)$  يقبل القسمة على 5 \* إذا كانت  $n$  لا تقبل القسمة على 5 فإن  $n = 5k + 1$  أو  $n = 5k + 2$  أو  $n = 5k + 3$  أو  $n = 5k + 4$

ومنه  $n^2 - 1$  يقبل القسمة على 5 أو  $n^2 + 1$  يقبل القسمة على 5

و بالتالي  $(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^4 - 1$  يقبل القسمة على 5

إذن  $n(n^4 - 1)$  يقبل القسمة على 5

\* إذا كانت  $n$  تقبل القسمة على 5 فإن  $n(n^4 - 1)$  يقبل القسمة على 5

إذن  $n(n^4 - 1)$  يقبل القسمة على 5 مهما كانت  $n$  من  $\mathbb{N}$